MATEMÁTICAS II

MANUAL BÁSICO DE INTEGRACIÓN

I.E.S. Juan Goytisolo

Curso 2.018/19

Profesor: Francisco M. Morales

INDICACIONES PREVIAS Y COSAS IMPORTANTES

- Recuerda que integrar es el proceso inverso a derivar. Esto significa que tú te vas a encontrar "derivadas" y vas a tener que "averiguar" de qué función vienen (estas funciones se llaman <u>*primitivas*</u>).

- Para saber integrar bien es muy importante saberse la tabla de integrales y tener en mente las derivadas. Practica varias integrales inmediatas antes de aprender los otros métodos, pues en definitiva para dichos métodos hacen falta las integrales inmediatas. Si no te las sabes bien **<u>¡ESTUDIATELAS!</u>**, ya que en caso contrario este pequeño manual no te servirá de nada…

- No existe una regla clara para saber cuándo aplicar un método u otro, de hecho hay varias integrales que pueden resolverse por distintos métodos. Solo la práctica y la intuición te ayudarán a saber que método es el adecuado. Al principio es difícil saberlo así que **<u>PACIENCIA</u>**…

  Los números "sueltos" se pueden sacar de las integrales. Del mismo modo que cuando aparecen sumas o restas podemos "separar" la integral en dos o más… esto es muy importante, pues nos va a servir para resolver algunas integrales inmediatas y especialmente las racionales. Mira el ejemplo:

$$\int 2x^2 + 8x^3 dx = 2\int x^2 dx + 8\int x^3 dx$$

- En ocasiones si pones un número a en el integrando, la integral te quedaría inmediata. Esto se puede hacer pero para que las cosas no varíen debes poner entonces fuera de la integral la fracción $1/a$ para compensar. Recuerda también que cuando das la solución de una integral **<u>SIEMPRE</u>** tienes que poner la constante C al final. Mira el ejemplo:

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Pongo esta fracción porque dentro he puesto un 2

Integral inmediata

CAMBIO DE VARIABLE

1. Se suele usar este método cuando aparecen polinomios elevados a alguna potencia y en algunos casos en los que aparecen fracciones y/o raíces. No obstante también se puede aplicar cuando salen razones trigonométricas.
   Los cambios no están hechos de antemano, tienes que elegirlos tú (aunque sobre todo al principio para practicar te los darán hechos…). En general suelen ser polinomios.

PASOS	EJEMPLO: $\int (3x-5)^4\,dx$
1) Seleccionar el cambio	1) $3x-5=t$
2) Derivar a ambos lados	2) $3dx=dt$
3) Despejar dx (piensa en dx cómo si se tratase de una "x" en una ecuación)	3) $dx=\frac{dt}{3}$
4) Hacer los cambios (teniendo en cuenta los pasos 1 y 3) y resolvemos la integral en la variable t	4) $\int (3x-5)^4\,dx \to \int t^4 \frac{dt}{3} \to \frac{1}{3}\int t^4 dt \to \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{t^5}{15}+C$
5) Deshacer el cambio (hecho en el paso 1) para expresarlo en x	5) $\int (3x-5)^4\,dx=\frac{(3x-5)^5}{15}+C$

POR PARTES

Es frecuente usarlo cuando salen cosas trigonométricas, exponenciales, etc. (muchas de las veces mezcladas con polinomios). Hay que saberse una fórmula.

PASOS	EJEMPLO: $\int x \ln x dx$
1) Seleccionamos una parte que llamaremos u. Para elegirla seguimos la siguiente reglilla de preferencia (de mayor a menor) de los ALPES: A Arcos ($\arcsin, \arccos, \arctan \ldots$) L Logaritmos P Polinomios E Exponenciales S Senos, cosenos… Y derivamos para obtener du.	1) $u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx$
2) La parte que nos queda será dv y tenemos que integrar para obtener v.	2) $dv = xdx \to v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}$
3) Aplicar la formula: $\boxed{u \cdot v - \int vdu}$	3) $\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int xdx$
4) Resolvemos la integral que nos queda en el paso 3.	4) $\int xdx = \frac{x^2}{2}$
5) Sustituir el valor de la integral en lo que me había quedado en el paso 3 y hago las cuentas posibles para simplificar.	5) $\int x \ln xdx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

INDICACIONES

1. En ocasiones puede que salga una sola cosa al cuadrado, pero en realidad son 2! Si te das cuenta de eso puedes aplicar este método. Por ejemplo, si tienes $(\sin x)^2$ en realidad es $(\sin x \cdot \sin x)$ así que puedes tomar $u = \sin x$, $dv = \sin xdx$ y proceder por partes.

2. La integral del paso 4 no siempre es sencilla. En muchos casos hay que aplicarle otro método de integración (generalmente por partes otra vez) y en ocasiones acaba conduciendo a las llamadas ***integrales cíclicas*** (sale dos veces la integral del principio y suele pasar con los senos y los cosenos). Mira el ejemplo $\int e^x \sin xdx$:

$$\left.\begin{array}{l} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = \sin xdx \to v = \int \sin xdx = -\cos x \end{array}\right\} \to \int e^x \sin xdx = e^x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot e^x dx = e^x \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot e^x dx$$

Resolvemos la integral $\int \cos x \cdot e^x dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = \cos dx \to v = \int \cos xdx = \sin x \end{array}\right\} \to \int e^x \cos xdx = e^x \cdot \sin x - \int \sin \cdot e^x dx$$

Sustituimos:

$$\int e^x \sin xdx = e^x \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot e^x dx = e^x \cdot (-\cos x) + e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx$$

Y como tenemos dos veces la misma integral, si despejamos (piensa que la integral es como si fuese una “x” en una ecuación) queda:

$$2\int e^x \sin xdx = e^x \cdot (-\cos x) + e^x \cdot \sin x \to \int e^x \sin xdx = \frac{e^x \cdot (-\cos x) + e^x \cdot \sin x}{2} + C$$

RACIONALES

Se trata de un polinomio dividido entre otro polinomio, hay varios casos que tenemos que distinguir:

GRADO DEL NUMERADOR MENOR QUE EL GRADO DEL DENOMINADOR

Raíces simples (no se repite ninguna raíz)

PASOS	EJEMPLO: $\int \frac{x+2}{x^2-2x-15}dx$
1) Calcular las raíces del denominador (igualando a 0 y resolviendo la ecuación)	1) $x^2-2x-15=0 \rightarrow x=-3 \text{ y } x=5$
2) Descompongo la fracción en base a las raíces que he obtenido.	2) $\frac{x+2}{x^2-2x-15}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-5)}$
3) Multiplico cada letra mayúscula por el factor opuesto (el que no tiene abajo) y quito denominadores	3) $\frac{x+2}{\cancel{x^2-2x-15}}=\frac{A(x-5)}{\cancel{(x+3)}}+\frac{B(x+3)}{\cancel{(x-5)}}$
4) Le doy distintos valores a x para averiguar el valor de las letras mayúsculas.	4) $x+2=A(x-5)+B(x+3) \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=5 \rightarrow B=7/8 \\ \text{Si } x=-3 \rightarrow A=1/8 \end{cases}$
5) Resuelvo las integrales inmediatas (siempre van a ser de tipo $\ln$ o polinomios elevados a exponentes negativos).	5) $\int \frac{x+2}{x^2-2x-15}dx=\int \frac{1/8}{(x+3)}+\frac{7/8}{(x-5)}dx=$ $=\frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+3)}dx+\frac{7}{8}\int \frac{1}{(x-5)}dx=\frac{1}{8}\ln\lvert x+3\rvert+\frac{7}{8}\ln\lvert x-5\rvert+C$

Raíces dobles (se repite una o más raíces)

PASOS	EJEMPLO: $\int \frac{3x+8}{x^3-4x^2+4x}dx$
1) Calcular las raíces del denominador (igualando a 0 y resolviendo la ecuación, suele ser útil Ruffini para grado mayor que 2).	1) $x^3-4x^2+4x=0 \rightarrow x=0 \text{ y } x=2 \text{ (doble)}$
2) Descompongo la fracción en base a las raíces que he obtenido poniendo dos veces el factor de la raíz doble (la segunda vez elevado a 2).	2) $\frac{3x+8}{x^3-4x^2+4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$
3) Multiplico cada letra mayúscula por los factores opuestos (los que no tiene abajo) y quito denominadores.	3) $\frac{3x+8}{\cancel{x^3-4x^2+4x}}=\frac{A(x-2)^2}{\cancel{x}}+\frac{Bx(x-2)}{\cancel{(x-2)}}+\frac{Cx}{\cancel{(x-2)^2}}$
4) Le doy distintos valores a x (los que yo quiera) para averiguar el valor de las letras mayúsculas.	4) $3x+8=A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=0 \rightarrow A=2 \\ \text{Si } x=2 \rightarrow C=7 \\ \text{Si } x=1 \rightarrow B=-2 \end{cases}$
5) Resuelvo las integrales sustituyendo las mayúsculas (algunas serán inmediatas por logaritmos pero otras no).	5) $\int \frac{3x+8}{x^3-4x^2+4x}dx=\int \frac{2}{x}+\frac{-2}{(x-2)}+\frac{7}{(x-2)^2}dx=$ $=2\int \frac{1}{x}dx-2\int \frac{1}{x-2}dx+7\int \frac{1}{(x-2)^2}dx=$ $=2\ln\|x\|-2\ln\|x-2\|-7\cdot\frac{1}{x-2}+C$

GRADO DEL NUMERADOR MAYOR O IGUAL QUE EL GRADO DEL DENOMINADOR

En estos casos lo que hay que hacer es dividir el numerador entre el denominador y una vez hecho integrar una de las dos integrales que quedan como en el caso anterior y la otra por integración inmediata. Mira el ejemplo $\int \frac{x^2+x+3}{x-2}dx$:

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+3 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x+3 \\ \hline 3x+3 & \\ \hline -3x+6 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2+x+3}{x-2}dx = \int \frac{9}{x-2}dx + \int x+3dx$$

Y en este punto resuelvo cada una de las dos integrales por los métodos anteriores (generalmente la azul será racional y la roja inmediata). En este caso concreto las dos integrales son inmediatas así que queda:

$$\int \frac{x^2+x+3}{x-2}dx = \int \frac{9}{x-2}dx + \int x+3dx = 9\ln|x-2| + \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

CAMBIOS DE VARIABLE ESPECIALES

Existen algunas situaciones especiales en las que hay unos cambios de variables predeterminados que “nos van a facilitar la vida”. No obstante, estos cambios conducirán en varias situaciones a otros métodos de integración. Vamos a verlos

FUNCIONES IRRACIONALES

$$\boxed{\int \sqrt{c^2-(ax+b)^2}\,dx \to \ ax+b=c\cdot \sin t}$$

$$\boxed{\int \sqrt{(ax+b)^2-c^2}\,dx \to \ ax+b=\frac{c}{\cos t}}$$

$$\boxed{\int \sqrt{c^2+(ax+b)^2}\,dx \to \ ax+b=c\cdot \tan t}$$

Ejemplo:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx \to \begin{cases} x=2\sin t \Rightarrow \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)=t \\ dx=2\cos t dt \end{cases}$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx=\int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt=\int 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt=$$

$$=4\int \cos t\cdot \cos t dt=4\int \cos^2 t dt=4\cdot\left(\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{t}{2}\right)+C=4\cdot\left(\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)}{4}+\frac{\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2}\right)+C$$

Estas funciones aparecen sobre todo en cálculo de áreas (integrales definidas) por lo que muchas veces no es necesario deshacer el cambio.

PRODUCTO DE SENOS Y COSENOS

Para funciones de la forma $\boxed{f(x)=\sin^n(x)\cdot\cos^m(x)}$ se tienen los siguientes cambios:

- n par, m par $\to \tan(x)=t$
- n par, m impar $\to \sin(x)=t$
- n impar, m par $\to \cos(x)=t$
- n impar, m impar $\to \sin(x)=t$ o $\cos(x)=t$

Ejemplo:

$$\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx \to \begin{cases} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{cases}$$

$$\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx = \int t^2\cdot\cancel{\cos x}\cdot\frac{dt}{\cancel{\cos x}} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{\sin^3 x}{3}+C$$

CAMBIO TAN(x) =t

Es un cambio muy útil cuando aparecen fracciones en las que los denominadores hay senos o cosenos elevados al cuadrado. Con este cambio se producen las siguientes transformaciones:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

Ejemplo:

$$\int \cos^{-4} x\, dx \to \tan x = t$$

$$\int \cos^{-4} x\, dx = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1}{\left(\cos^2 x\right)^2} dx \to= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{\left(1+t^2\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{1+t^2}} dt = \int 1+t^2 dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

CAMBIO TAN(x/2) = t

Es un cambio muy útil cuando aparecen fracciones en las que los denominadores hay senos y/o cosenos. Con este cambio se producen las siguientes transformaciones:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{\sin x - \cos x - 1} dx \to \tan \frac{x}{2} = t$$

$$\int \frac{1}{\sin x - \cos x - 1} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{\frac{2t-2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{\cancel{\left(1+t^2\right)}}{\cancel{2}\left(t-1\right)} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\left(1+t^2\right)}} dt = \int \frac{1}{t-1} dt = \ln\left|t-1\right| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| + C$$