# 9.Método de integración por partes.-

Se trata de otro método que permite resolver cierto tipo de integrales. Veamos:

P Sea $u(x)$ una función. Para abreviar la expresaremos por $u$. Su derivada será $u'$ y su diferencial $du = u'dx$

P Sea $v(x)$ otra función. Para abreviar la expresaremos por $v$. Su derivada será $v'$ y su diferencial $dv = v'dx$

P Supongamos que deseamos resolver una integral de la forma siguiente:

$$I = \int u \; dv = \int u \cdot v' \, dx$$

Es decir, la función integrando es el producto de la función $u$ y la derivada de $v$. Dicho de otro modo, se trata de hallar las primitivas de una función que es el producto de una función ***u*** por la diferencial de otra ***v***.

¡Pues bien!

Vamos a ***deducir una fórmula*** que nos permitirá resolver integrales de este tipo. Veamos:

O Sea $(u{\cdot}v)(x) = u\,(x){\cdot}v(x)$ la función producto de $u$ y $v$. Para abreviar expresaremos $u{\cdot}v$

O Derivemos la función producto: $(u{\cdot}v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ (recuerda "*derivada de un producto*")

O La diferencial de la función producto será:

$$d(u{\cdot}v) = (u{\cdot}v)'dx = v \cdot du + u \cdot dv = v \cdot u'dx + u \cdot v'dx$$

O Si consideramos la igualdad $d(u{\cdot}v) = v \cdot du + u \cdot dv$ e integramos en ambos miembros:

$$\int d(u \cdot v) = \int (v \cdot du + u \cdot dv) \underbrace{=}_{\textit{integral de una suma}} \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

O Considerando que la integración es la operación recíproca de la derivación, es decir, "*la integral de la derivada de una función es esa función*":

$$\int d(u \cdot v) = \int (u \cdot v)' \, dx = u \cdot v$$

O Considerando las dos igualdades anteriores, podemos poner:

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

O Recordemos que el objetivo es calcular la integral $I = \int u \cdot dv$, por lo que despejando:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

que es la ***fórmula*** del ***método de integración por partes***, la cual nos permite resolver la integral $I = \int u \cdot dv$ si antes somos capaces de resolver la integral $\int v \cdot du$

## 9.1.Observaciones.-

Hagamos algunas observaciones importantes que deben considerarse al aplicar este método de integración:

Î Este método de integración se emplea cuando la función integrando es el producto de una función ($u$) por la derivada de otra ($v$), es decir:

$$I = \int \underbrace{u \cdot v'}_{\textit{integrando}} \, dx$$

Ï En la práctica, si empleamos este método, debemos separar el integrando en dos partes.

Una es la función $u = u(x)$ y la otra $dv = v'(x)\, dx$. Saber elegir adecuadamente quien hace el papel de $u(x)$ y quien el de $v'(x)$ es el paso más difícil en muchos casos.

Ð Suele ocurrir que al hacer una elección para $u(x)$ y $v'(x)$, la integral, lejos de resolverse, se complique más. Esto significa que no hemos hecho la elección correcta y debemos intentarlo con una nueva.

Ñ Nótese que para resolver al integral $I = \int u\, dv$ debemos hallar el producto de dos funciones ($u{\cdot}v$), lo cual no representa ninguna dificultad y otra integral $\int v\, du$.

Esta última integral debe ser más fácil de resolver que $I = \int u\, dv$, ya que si fuese más complicada el método no sería útil (evidentemente, no nos interesa que para resolver una integral tengamos que hacer una más complicada que la que nos dan).

Ò Puede ocurrir que la integral $\int v\, du$ que debemos resolver para hallar $I = \int u\, dv$, se tenga que resolver por este mismo método, es decir, hay que aplicar el método de integración por partes dos veces.

Ó Para recordar la fórmula de integración por este método, existe una regla nemotécnica que es facilita recordarla y así evitar un esfuerzo memorístico. Veamos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

"*Un día vi un vigilante vestido de uniforme*"

» Regla nemotécnica

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este método.

## Ejemplo 32.-

Intentemos resolver por el método de integración por partes $I = \int x^2 Lx\, dx$

Veamos:

S La función integrando es $f(x) = x^2 Lx$

S Efectuamos la siguiente elección : $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = Lx\, dx \end{cases}$

S Aplicando la fórmula tenemos: $I = \int x^2 Lx\, dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$

S Veamos que elementos conocemos y desconocemos de la fórmula anterior:

$$\textit{elementos de la fórmula} \begin{cases} u \to \textit{conocida, ya que } u = x^2 \\ v \to \textit{desconocida, aunque conocemos su derivada } v' = Lx \\ du \to \textit{la podemos hallar. En efecto: } du = 2x\, dx \end{cases}$$

S Debemos hallar la función $v(x)$ para poder aplicar la fórmula. Veamos:

$v = \int dv = \int v'(x)\ dx = \int Lx\ dx$ » Supongamos que esta integral nos resulta difícil.

Nos preguntamos: ¿Habremos hecho una elección correcta?
¿Habrá una elección mejor que la anterior?

Vamos a intentarlo.

R Hacemos la siguiente elección: $\begin{cases} u = Lx \\ dv = x^2 dx \end{cases}$

R Aplicando la fórmula tenemos: $I = \int Lx \cdot x^2\, dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$

R Veamos que elementos conocemos y desconocemos de la fórmula anterior:

$$elementos\ de\ la\ fórmula \begin{cases} u \to\ conocida,\ ya\ que\ u = Lx \\ v \to\ desconocida, aunque\ conocemos\ su\ derivada\ v' = x^2 \\ du \to\ la\ podemos\ hallar. En\ efecto: du = \frac{1}{x}dx \end{cases}$$

R Debemos hallar la función $v(x)$ para poder aplicar la fórmula. Veamos:

$$v = \int dv = \int v'(x)\, dx = \int x^2\, dx \underbrace{=}_{inmediata} \frac{x^3}{3}$$ 3 Hemos dejado la constante C para el final

R Ahora conocemos todos los elementos que intervienen en la fórmula y podemos aplicarla:

$$I = \int x^2 Lx\, dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du = Lx \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3\, Lx}{3} - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3\, Lx}{3} - I_1$$

Hemos llamado $I_1 = \int \frac{x^2}{3}dx$ , integral que debemos resolver.

R Resolvamos la integral $I_1$ :

$$I_1 = \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9}$$ » Hemos dejado la constante C para el final

R Substituyendo:

$$I = \int x^2 Lx\, dx = \frac{x^3 Lx}{3} - \frac{x^3}{9} + C = \frac{3x^3 Lx - x^3}{9} + C = \frac{x^3(3\,Lx - 1)}{9} + C = \frac{x^3\left(Lx^3 - 1\right)}{9} + C$$

## Ejemplo 33.-

Resolvamos por el método de integración por partes la integral $I = \int x\ cos\,x\ dx$

U Debemos hacer una elección $\begin{cases} u = ? \\ dv = ?\,dx \end{cases}$

U Después de hacer la elección y al aplicar la fórmula, nos encontraremos que debemos resolver dos integrales:

Debemos resolver $\begin{cases} v = \int dv \\ \int v\, du \end{cases}$

| |
|---|
| Estas integrales deben ser más sencillas de resolver que la propia *I*, ya que si no fuese así entenderemos que el método no "funciona" |

X Hagamos la siguiente elección: $\begin{cases} u = x \\ dv = v'\, dx = cos\,x\ dx \end{cases}$

X Hallemos los elementos que faltan de la fórmula: $\begin{cases} du = u'\, dx = 1dx = dx \\ v = \int dv = \int cos\,x\ dx = sen\,x \end{cases}$

X Apliquemos la fórmula:

$$I = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du = x\ sen\,x - \int sen\,x\ dx = x\,sen\,x - \left[-cos\,x\right] + C =$$
$$= x\ sen\,x + cos\,x + C$$

## Ejemplo 34.-

En este ejemplo veremos un caso en el que hay que aplicar el método en dos ocasiones.

Queremos resolver la integral $I = \int x^2 e^x dx$

Veamos:

M Decidimos intentarlo por el método "*por partes*"

M Hacemos una elección (con la esperanza que funcione): $\begin{cases} u = u(x) = e^x \\ dv = v'(x)\ dx = x^2 dx \end{cases}$

M Escribimos la fórmula: $I = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

M Observamos que necesitamos hallar ***du*** y ***v*** :

$$\begin{cases} du = e^x\ dx \\ v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \quad \text{(la constante la dejamos para el final)} \end{cases}$$

M Substituimos en la fórmula:

$$I = \int x^2 e^x dx = \int e^x x^2 dx = e^x\,\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} e^x dx = e^x\,\frac{x^3}{3} - I_1$$

Hemos llamado $I_1 = \int \frac{x^3}{3} e^x\ dx$

M Debemos resolver la integral $I_1$, la cual nos parece "*más difícil*" que la propuesta. Esto nos lleva a pensar lo siguiente:
"*O el método elegido (integración por partes) no es bueno para esta integral o la elección de las funciones **u** y **dv** no ha sido la adecuada*"

E Cortamos con lo anterior e intentamos otra elección: $\begin{cases} u = u(x) = x^2 \\ dv = v'(x)\,dx = e^x dx \end{cases}$

E Hallemos los elementos que faltan para poder aplicar la fórmula:

$$\begin{cases} du = u'(x)\,dx = 2x\,dx \\ v = \int dv = \int v'(x)\,dx = \int e^x\ dx = e^x \quad \text{(omitimos la constante C)} \end{cases}$$

E Aplicamos la fórmula:

$$I = \int x^2 e^x dx = x^2\ e^x - \int\ e^x 2x\,dx = x^2\ e^x - 2\int x\,e^x\ dx = x^2\ e^x - 2\,I_1 \qquad (\text{y})$$

Hemos llamado $I_1 = \int x\,e^x dx$

E Debemos resolver la integral $I_1$, la cual nos parece "*más fácil*" que la propuesta. Esto nos anima a seguir por este camino.

E Para resolver $I_1 = \int x\,e^x dx$ intentaremos el mismo método (integración por partes).

Hacemos la elección: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x\ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x \quad (\textit{omitimos } C) \end{cases}$

E Aplicamos la fórmula (no olvidar que estamos hallando $I_1$)

$$I_1 = \int x\,e^x dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du = x\,e^x - \int e^x dx = x\,e^x - e^x \ (\textit{omitimos}\, C)$$

E Substituimos en (y):

$$I = x^2 e^x - 2\left[x\,e^x - e^x\right] + C = x^2 e^x - 2\,x\,e^x + 2\,e^x + C$$

## Ejemplo 35.-

En el ejemplo anterior hallamos las funciones primitivas de la función $f(x) = x^2 e^x$, obteniendo como solución $F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \quad C \in \mathbf{R}$

Ahora queremos hallar la primitiva a cuya gráfica pertenece el punto O(0,0)

Veamos:

X Para cada valor de C tenemos una función $F(x)$ distinta y, por tanto, con una gráfica distinta.

X Buscamos $F(x)$ con la condición de que $F(0) = 0$ :

$$\left.\begin{array}{l} F(0) = 0^2 \cdot e^0 - 2\cdot 0 \cdot e^0 + 2\cdot e^0 + C = 0 \\ 1 - 0 + 2 + C = 0 \\ C = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 3}$$

# 9.2.Ejercicios resueltos por el método de integración por partes.-

En este apartado veremos algunas integrales resueltas por este método de integración. Insistimos en la posibilidad de que al enfrentarnos a la resolución de una integral aplicando uno de los métodos explicados no consigamos resolverla, lo cual puede deberse a lo inadecuado del método elegido.

## Ejercicio 119.-

Resolver la integral $I = \int x \; sen\, x \; dx$

**Solución:**

Aplicaremos el método de integración por partes.

Hacemos: $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = sen\, x \; dx \end{array}\right. \xrightarrow{deducimos} \left\{\begin{array}{l} du = dx \\ v = \int dv = \int sen\, x \; dx = -cos\, x \end{array}\right.$

Aplicamos la fórmula:

$$I = \int x \; sen\, x \; dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du = x\left(-cos\, x\right) - \int (-cos\, x)\, dx =$$
$$= -x \; cos\, x + \int cos\, x \; dx = -x \; cos\, x + sen\, x + C$$

## Ejercicio 120.-

Hallar el conjunto de las funciones primitivas de la función $g(x) = Lx$

**Solución:**

[ Se trata de resolver la integral $I = \int g(x)\, dx = \int Lx\, dx$

[ Lo intentaremos por el método "*por partes*"

Hacemos $\left\{\begin{array}{l} u = Lx \\ dv = dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int dv = \int dx = \int 1\, dx = x \;\; (omitimos\; C) \end{array}\right.$

[ Aplicamos la fórmula del método de integración por partes:

$$I = \int g(x)\, dx = \int Lx\, dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du = Lx \cdot x - \int x \frac{1}{x} dx = Lx \cdot x - \int dx =$$
$$= x\, Lx - x + C$$

$$\boxed{G(x) = x\,Lx - x + C = Lx^x - x + C \quad C \in \mathbf{R}}$$

Hemos expresado al conjunto de las funciones primitivas de dos formas distintas.

## Ejercicio 121.-

Resolver la integral $I = \int x\,Lx\,dx$

**Solución:**

Empleamos el método "*por partes*" $\begin{cases} u = Lx \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Aplicamos la fórmula y substituimos:

$$I = \int x\,Lx\,dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = Lx\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}Lx - \int\frac{x}{2}dx =$$

$$= \frac{x^2\,Lx}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\,Lx}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{2x^2\,Lx - x^2}{4} + C$$

## Ejercicio 122.-

Resolver la integral $I = \int arc\,tg\,x\,dx$

**Solución:**

Lo intentamos "*por partes*" $\begin{cases} u = arc\,tg\,x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$

Aplicamos la fórmula de integración por partes y substituimos:

$$I = \int arc\,tg\,x\,dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = arc\,tg\,x\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = x\;arc\,tg\,x - \int\frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= x\;arc\,tg\,x - I_1 \quad (*)$$

Hemos llamado $I_1 = \int\frac{x}{1+x^2}dx$, integral que debemos resolver.

Por cambio de variable, hacemos: $\begin{cases} t = 1 + x^2 \\ dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2} \end{cases}$

Substituimos en la integral $I_1$ :

$$I_1 = \int\frac{x}{1+x^2}dx = \int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}L\left|t\right| = \frac{1}{2}L\left|1+x^2\right|$$ (ponemos la constante C al final)

Substituyendo en la integral $I$, referencia (*) :

$$I = \int arc\,tg\,x\,dx = x\;arc\,tg\,x - \frac{1}{2}L\left|x^2+1\right| + C =$$

$$= x\;arc\,tg\,x - \frac{1}{2}L\left(x^2+1\right) + C =$$

$$= x\;arc\,tg\,x - \sqrt{L\left(x^2+1\right)} + C$$

Obsérvese que hemos expresado la solución de varias formas distintas al considerar que:

$\left|x^2+1\right| = x^2+1$

$L\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}L\left(x^2+1\right)$

## Ejercicio 123.-

Resolver la integral $I = \int e^x cos\, x\ dx$

**Solución:**

Método "*por partes*" $\begin{cases} u = cos\, x \\ dv = v'\, dx = e^x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -sen\, x\ dx \\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{cases}$

Aplicamos la fórmula del método de integración por partes y substituimos:

$$I = \int e^x cos\, x\ dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du = cos\, x \cdot e^x - \int e^x (-sen\, x)\, dx =$$

$$= e^x\, cos\, x + \int e^x sen\, x\ dx = e^x\, cos\, x + I_1 \quad (*)$$

Debemos resolver la integral $I_1 = \int e^x sen\, x\ dx$

Los intentamos por el método de integración por partes:

Hacemos : $\begin{cases} u = sen\, x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = cos\, x\ dx \\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x \quad (dejamos\ C\ para\ el\ final) \end{cases}$

Aplicamos la fórmula y substituimos:

$$I_1 = \int e^x sen\, x\ dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du = sen\, x \cdot e^x - \int e^x\, cos\, x\ dx =$$

$$= e^x\, sen\, x - \int e^x cos\, x\ dx = e^x\, sen\, x - I \quad (**)$$

Nótese que $I$ es la integral dada para resolver.
Substituyendo el la referencia (*):

$$\left.\begin{array}{l} I = e^x\, cos\, x + I_1 \\ I = e^x\, cos\, x + e^x\, sen\, x - I \\ 2\, I = e^x\, cos\, x + e^x\, sen\, x \\ I = \dfrac{e^x\, cos\, x + e^x\, sen\, x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I = \int e^x\, cos\, x\ dx = \dfrac{e^x (sen\, x + cos\, x)}{2} + C \\ siendo\ \ C \in R \end{array}}$$

## Ejercicio 124.-

Resolver la integral $I = \int arc\, sen\, x\ dx$

**Solución:**

Método "*por partes*" $\begin{cases} u = arc\, sen\, x \\ dv = v'\, dx = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'\, dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$

Aplicamos la fórmula del método de integración por partes y substituimos:

$$I = \int arc\, sen\, x\ dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du = arc\, sen\, x \cdot x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= x\ arc\, sen\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\ arc\, sen\, x - I_1 \quad (*)$$

Debemos resolver la integral $I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Por cambio de variable, hacemos : $\begin{cases} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \xrightarrow{despejando} xdx = -\frac{1}{2}dt \end{cases}$

Substituyendo en la integral $I_1$ :

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{-1}{2\sqrt{t}}\,dt = -\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Substituyendo en la referencia (*) :

$$I = \int arc\,sen\,x\;dx = x\;arc\,sen\,x - I_1 = x\;arc\,sen\,x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C =$$

$$= x\;arc\,sen\,x + \sqrt{1-x^2} + C$$

## Ejercicio 125.-

Resolver la integral $I = \int \sqrt{x}\;Lx\,dx$

**Solución:**

Lo intentamos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = Lx \\ dv = \sqrt{x}\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \quad (dejamos\ C\ para\ el\ final) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula y substituimos:

$$I = \int \sqrt{x}\;Lx\;dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = Lx\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{2\sqrt{x^3}\;Lx}{3} - \frac{2}{3}\int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x}dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}\;Lx}{3} - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{x^3}\;Lx}{3} - \frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^3}\;Lx}{3} - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$$

## Ejercicio 126.-

En el ejercicio anterior hemos hallado el conjunto de las primitivas de $f(x) = \sqrt{x}\;Lx$

Determinar aquella primitiva a cuya gráfica pertenece el punto del plano P(1,1).

**Solución:**

El conjunto de las primitivas de $f(x)$ es $F(x) = \frac{2\sqrt{x^3}\;Lx}{3} - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C \quad C \in \mathbf{R}$

Buscamos el valor de C tal que $F(1) = 1$. Veamos:

$$F(1) = 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{1^3}\;L1}{3} - \frac{4}{9}\sqrt{1^3} + C = 1 \Rightarrow \frac{2\cdot 1\cdot 0}{3} - \frac{4}{9}\cdot 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$$

En definitiva:

$$\boxed{F(x) = \frac{2\sqrt{x^3}\;Lx}{3} - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + \frac{13}{9}}$$

## Ejercicio 127.-

Resolver la integral $I = \int \frac{x}{cos^2 x}\, dx$

**Solución:**

Integración por partes : $\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \frac{1}{cos^2 x}\, dx \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int dv = \int \frac{1}{cos^2 x}\, dx \underbrace{=}_{inmediata} tg\, x \end{array} \right.$

Aplicando la fórmula y substituyendo:

$$I = \int \frac{x}{cos^2 x}\, dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du = x\ tg\, x - \int tg\, x\, dx \underbrace{=}_{ver\ ejercicio\ 45} x\ tg\, x - L\left| cos\, x \right| + C$$

## Ejercicio 128.-

Resolver la integral $I = \int (Lx)^2\, dx$

**Solución:**

Cambiamos el aspecto del integrando: $I = \int (Lx)^2\, dx = \int Lx\ Lx\ dx$

"*Por partes*" $\left\{ \begin{array}{l} u = Lx \\ dv = Lx\, dx \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{1}{x}\, dx \\ v = \int dv = \int Lx\, dx \underbrace{=}_{ver\ ejercicio\ 120} x\, Lx - x \ \ (C\ \ para\, el\ \ final) \end{array} \right.$

Aplicando la fórmula y substituyendo:

$$I = \int (Lx)^2 dx = \int Lx\ Lx\ dx = u \cdot v - \int v\, du = Lx\left[ x\, Lx - x \right] - \int \left[ x\, Lx - x \right] \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= x\ (Lx)^2 - x\, Lx - \int Lx\, dx + \int dx = x\ (Lx)^2 - x\, Lx - \left[ x\, Lx - x \right] + x + C =$$

$$= x\ (Lx)^2 - x\, Lx - x\, Lx + x + x + C = x\ (Lx)^2 - 2\, x\, Lx + 2\, x + C$$

## Ejercicio 129.-

Comprobar la validez del resultado obtenido en el ejercicio anterior.

**Solución:**

En el ejercicio anterior vimos que $\int (Lx)^2\, dx = F(x) = x\,(Lx)^2 - 2x\, Lx + 2x + C$

Debe verificarse que $F'(x) = (Lx)^2$

Veamos: $\left\{ \begin{array}{l} F'(x) = 1 \cdot (Lx)^2 + x \cdot 2\, Lx \cdot \frac{1}{x} - \left[ 2 \cdot Lx + 2x \cdot \frac{1}{x} \right] + 2 + 0 = \\ \qquad = (Lx)^2 + 2\, Lx - 2\, Lx - 2 + 2 = (Lx)^2 \quad ¡comprobado! \end{array} \right.$

## Ejercicio 130.-

Resolver la integral $I = \int x^2 cos\, x\ dx$

**Solución:**

Utilizaremos el método de integración por partes.

Hacemos: $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x\ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x\,dx \\ v = \int dv = \int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x \quad (C \text{ para el final}) \end{cases}$

Aplicamos la fórmula y substituimos:

$$I = \int x^2 \cos x\ dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = x^2\ \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x\ dx =$$

$$= x^2\ \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\ dx = x^2\ \operatorname{sen} x - 2I_1 \quad (*)$$

Hemos llamado $I_1 = \int x \operatorname{sen} x\ dx$, integral que debemos resolver.

Resolvemos: $I_1 = \int x \operatorname{sen} x\ dx \underbrace{=}_{ver\ ejercicio\ 119} -x\cos x + \operatorname{sen} x \quad (dejamos\ C\ para\ el\ final)$

Substituyendo en la referencia (*):

$$I = \int x^2 \cos x\ dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x\right) + C =$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$$

## Ejercicio 131.-

Resolver la integral $I = \int \operatorname{sen} x\ \cos x\ dx$

**Solución:**

Utilizaremos el método de integración por partes.

Hacemos: $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \\ dv = \cos x\ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x\ dx \\ v = \int dv = \int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x \quad (C \text{ para el final}) \end{cases}$

Aplicamos la fórmula y substituimos:

$$I = \int \operatorname{sen} x\ \cos x\ dx = \int u\ dv = u\cdot v - \int v\ du = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ \cos x\ dx =$$

$$= \operatorname{sen}^2 x - I$$

Operando y despejando: $2I = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow I = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$

Introduciendo la constante: $\boxed{I = \int \operatorname{sen} x\ \cos x\ dx = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C}$

**Observación_1:**

Esta integral también podemos resolverla por el método de cambio de variable. Veamos:

Llamamos $t = \operatorname{sen} x \xrightarrow{diferenciando} dt = \cos x\ dx$

Substituyendo en la integral:

$$I = \int \operatorname{sen} x\ \cos x\ dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C \underbrace{=}_{deshaciendo\ el\ cambio} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$$

**Observación_2:**

También resolvimos esta integral de otro modo en el **ejercicio 58** (página 26) obteniendo:

$$I = \int \operatorname{sen} x\ \cos x\ dx = \frac{-\cos 2x}{4} + C$$

**Observación_3:**

Según lo anterior hemos obtenido dos resultados distintos para la misma integral, es decir:

$$I = \int sen\,x\ cos\,x\ dx = \begin{cases} \dfrac{sen^2 x}{2} + C \quad siendo \quad F_1 = \dfrac{sen^2 x}{2} \quad una\ primitiva \\ \dfrac{-cos\,2x}{4} + C \ \ siendo\ \ F_2 = \dfrac{-cos\,2x}{4} \quad otra\ primitva \end{cases}$$

Aparentemente las primitivas son distintas. ¿Qué explicación tiene esta disparidad de resultados? Lo explicamos:

$f(x) = sen\,x \cdot cos\,x$ es una función de la que hemos hallado sus primitivas. Sabemos que dos primitivas de una misma función difieren en una constante (gráficamente se interpreta como que sus gráficas son lineas paralelas). Por tanto, si realizamos la resta $F_1$ &$F_2$, el resultado debe ser una constante. Vamos a efectuar esa resta:

$$F_1 - F_2 = \frac{sen^2 x}{2} - \frac{-cos\,2x}{4} = \frac{sen^2 x}{2} + \frac{cos\,2x}{4} \underbrace{=}_{\substack{recuerda\ que \\ cos\,2x = \cos^2 x - sen^2 x}} \frac{sen^2 x}{2} + \frac{cos^2 x - sen^2 x}{4} =$$

$$= \frac{2\,sen^2 x + cos^2 x - sen^2 x}{4} = \frac{sen^2 x + cos^2 x}{4} = \frac{1}{4} \leftarrow constante$$

Por tanto, los dos resultados son válidos.

## Ejercicio 132.-

Resolver la integral $I = \int x^3 sen\,x\ dx$

**Solución:**

Método "*por partes*": $\begin{cases} u = x^3 \\ dv = sen\,x\ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = \int dv = \int sen\,x\ dx = -\,cos\,x\ \ (C\ al\ \ final) \end{cases}$

Aplicando la fórmula y substituyendo:

$$I = \int x^3 sen\,x\ dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du = x^3\left(-cos\,x\right) - \int (-\cos x)\,3x^2 dx =$$

$$= -\,x^3 cos\,x + 3\int x^2 cos\,x\ dx = -x^3 cos\,x + 3\,I_1 \quad (*)$$

Hemos llamado $I_1 = \int x^2 cos\,x\ dx$, integral que debemos resolver:

$$I_1 = \int x^2 cos\,x\ dx \underbrace{=}_{Ejercicio\,130} x^2 sen\,x + 2x\,cos\,x - 2\,sen\,x$$

Substituyendo en la referencia (*) :

$$I = \int x^3 sen\,x\ dx = -\,x^3 cos\,x + 3\left(x^2 sen\,x + 2\,x\,cos\,x - 2\,sen\,x\right) + C =$$

$$= -\,x^3 cos\,x + 3x^2 sen\,x + 6\,x\ cos\,x - 6\,sen\,x + C$$

## Ejercicio 133.-

Resolver la integral $I = \int \dfrac{x\,arc\,sen\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**Solución:**

Método de integración "*por partes*": $\begin{cases} u = arc\,sen\,x \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{cases}$

Diferenciando e integrando: $\begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{=}_{Ejercicio\,102} -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes y substituyendo:

$$I = \int \frac{x\,arc\,sen\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = arc\,sen\,x\cdot\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\;arc\,sen\,x + \int 1\,dx = -\sqrt{1-x^2}\;arc\,sen\,x + \int dx = -\sqrt{1-x^2}\;arc\,sen\,x + x + C$$

## Ejercicio 134.-

Resolver la integral $I = \displaystyle\int \frac{x\,e^{arc\,sen\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**Solución:**

"*Por partes*" : $\begin{cases} u = e^{arc\,sen\,x} \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{arc\,sen\,x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \underbrace{=}_{Ejercicio\,102} -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes y substituyendo:

$$I = \int \frac{x\,e^{arc\,sen\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = e^{arc\,sen\,x}\cdot\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{e^{arc\,sen\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\cdot e^{arc\,sen\,x} + \int e^{arc\,sen\,x}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\cdot e^{arc\,sen\,x} + I_1 \quad (*)$$

Hemos llamado $I_1 = \int e^{arc\,sen\,x}\,dx$ , integral que debemos resolver:

"*Por partes*" : $\begin{cases} u = e^{arc\,sen\,x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{arc\,sen\,x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ v = \int dv = \int dx = x \ \ (omitimos\ C) \end{cases}$

Aplicando la fórmula y substituyendo:

$$I_1 = \int e^{arc\,sen\,x}\,dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = e^{arc\,sen\,x}\cdot x - \int x\,e^{arc\,sen\,x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\,e^{arc\,sen\,x} - \int \frac{x\,e^{arc\,sen\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,e^{arc\,sen\,x} - I \quad \leftarrow \quad I\ es\ la\ integral\ \ dada$$

Substituyendo en la referencia (*) :

$$I = \int \frac{x\,e^{arc\,sen\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\;e^{arc\,sen\,x} + x\,e^{arc\,sen\,x} - I$$

$$2\,I = -\sqrt{1-x^2}\;e^{arc\,sen\,x} + x\,e^{arc\,sen\,x}$$

$$I = \frac{-\sqrt{1-x^2}\;e^{arc\,sen\,x} + x\,e^{arc\,sen\,x}}{2} + C$$

## Ejercicio 135.-

Resolver la integral $I = \int x\sqrt{1+x}\,dx$

**Solución:**

"*Por partes*" : $\begin{cases} u = x \\ dv = \sqrt{1+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int \sqrt{1+x}\,dx = (*) \end{cases}$

Resolvamos la integral (*) :

$$v = \int \sqrt{1+x}\,dx \underbrace{=}_{\substack{por\ substitución \\ t=1+x\ ;\ dt=dx}} \int \sqrt{t}\,dx = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{t^3}}{3} + C = \frac{2\sqrt{(1+x)^3}}{3}$$

Aplicando la fórmula y substituyendo:

$$I = \int x\sqrt{1+x}\,dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = x\frac{2\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \int \frac{2\sqrt{(1+x)^3}}{3}dx = \frac{2x\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \frac{2}{3}\int \sqrt{(1+x)^3}\,dx =$$

$$= \frac{2x\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2x\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \frac{2}{3}I_1 \quad (**)$$

Hemos llamado $I_1 = \int (1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx$ , integral que debemos resolver :

Por el método de cambio de variable : $\begin{cases} t = 1+x \\ dt = dx \end{cases}$

Substituyendo:

$$I_1 = \int (1+x)^{\frac{3}{2}}dx = \int t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5} + C = \frac{2\sqrt{t^5}}{5} + C \underbrace{=}_{\substack{deshaciendo \\ el\ cambio}} \frac{2\sqrt{(1+x)^5}}{5}$$

Substituyendo en la referencia (**) :

$$I = \int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2x\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{(1+x)^5}}{5} + C = \frac{2x\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \frac{4\sqrt{(1+x)^5}}{15} + C$$

## Ejercicio 136.-

Resolver la integral $I = \int sec^3 x\ dx$

**Solución:**

Expresamos el integrando de otra manera: $I = \int sec^3 x\ dx = \int sec\,x\cdot sec^2 x\ dx$

Intentaremos el método de integración por partes.

Hacemos: $\begin{cases} u = sec\,x \\ dv = sec^2 x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(\frac{1}{cos\,x}\right)'dx = \frac{sen\,x}{cos^2 x}dx = \frac{sen\,x}{cos\,x}\cdot\frac{1}{cosx}dx = tg\,x\cdot sec\,x\ dx \\ v = \int dv = \int sec^2 x\,dx = \int \frac{1}{cos^2 x}dx \underbrace{=}_{inmediata} tg\,x \end{cases}$

Aplicando la fórmula y substituyendo:

$$I = \int sec\,x\cdot sec^2 x\ dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du = sec\,x\cdot tg\,x - \int tg\,x\ tg\,x\ sec\,x\ dx =$$

$$= sec\,x\cdot tg\,x - \int tg^2 x\ \ sec\,x\ dx = sec\,x\cdot tg\,x - I_1 \quad (*)$$

Hemos llamado $I_1 = \int tg^2 x \ sec\,x \ dx$ , integral que debemos resolver. Veamos:

$$I_1 = \int tg^2 x \ sec\,x \ dx = \int \frac{sen^2 x}{cos^2 x} sec\,x \ dx = \int \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} sec\,x \ dx = \int \left( \frac{1}{cos^2 x} - 1 \right) sec\,x \ dx =$$

$$= \int \left( sec^2 x - 1 \right) sec\,x \ dx = \int \left( sec^3 x - sec\,x \right) dx = \int sec^3 x \ dx - \int sec\,x \ dx = I - I_2$$

Hemos llamado $I_2 = \int sec\,x \ dx$

Substituyendo en la referencia (*) :

$$I = \int sec^3 x \ dx = sec\,x \cdot tg\,x - I_1 = sec\,x \cdot tg\,x - \left( I - I_2 \right) = sec\,x \cdot tg\,x - I + I_2$$

$$2I = sec\,x \cdot tg\,x + I_2 \quad ; \quad I = \frac{1}{2} sec\,x \cdot tg\,x + \frac{1}{2} I_2 \quad (**)$$

Debemos resolver la integral $I_2 = \int sec\,x \ dx$ :

Para resolverla, multiplicamos y dividimos el integrando por $sec\,x + tg\,x$ :

$$I_2 = \int sec\,x \ dx = \int \frac{sec\,x \cdot (sec\,x + tg\,x)}{sec\,x + tg\,x} dx = \int \frac{sec^2 x + sec\,x \cdot tg\,x}{sec\,x + tg\,x} dx = \quad (***)$$

Por cambio de variable:

$$\begin{cases} t = sec\,x + tg\,x \\ dt = \left( sec\,x + tg\,x \right)' dx = \left( \dfrac{1}{cos\,x} + \dfrac{sen\,x}{cos\,x} \right)' dx = \left( \dfrac{sen\,x}{cos^2 x} + \dfrac{1}{cos^2 x} \right) dx = \\ \quad = \left( sec\,x \cdot tg\,x + sec^2 x \right) dx \end{cases}$$

Substituyendo en la referencia (***) :

$$I_2 = \int sec\,x \ dx = \int \frac{sec^2 x + sec\,x \cdot tg\,x}{sec\,x + tg\,x} dx = \int \frac{dt}{t} \underbrace{=}_{inmediata} L|t| = L|sec\,x + tg\,x| \quad (C \ al \ final)$$

Substituyendo en la referencia (**) :

$$\boxed{I = \int sec^3 x \ dx = \frac{sec\,x \cdot tg\,x}{2} + \frac{L|sec\,x + tg\,x|}{2} + C}$$

## Ejercicio 137.-

Resolver la integral $I = \int x \, L3x \ dx$

**Solución:**

Lo intentamos "por partes" : $\begin{cases} u = L3x \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{3x} \cdot 3dx = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \int dv = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \quad (C \ al \ final) \end{cases}$

Aplicando la fórmula y substituyendo:

$$I = \int x\,L3x\,dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du = L3x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ L3x}{2} - \frac{1}{2} \int x\,dx =$$

$$= \frac{x^2 \ L3x}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2 \ L3x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = x^2 \ L\sqrt{3x} - \frac{x^2}{4} + C$$

## Ejercicio 138.-

Resolver la integral $I = \int \left(3x^2 - 2\right) sen\,5x\ dx$

**Solución:**

"Por partes" : $\begin{cases} u = 3x^2 - 2 \\ dv = sen\,5x\ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 6x\,dx \\ v = \int dv = \int sen\,5x\ dx = -\dfrac{cos\,5x}{5} \end{cases}$

Aplicando la fórmula del método de integración por partes:

$$I = \int \left(3x^2 - 2\right) sen\,5x\ dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du = \left(3x^2 - 2\right)\frac{-cos\,5x}{5} - \int \frac{-cos\,5x}{5} 6x\,dx =$$

$$= -\frac{\left(3x^2 - 2\right)\ cos\,5x}{5} + \frac{6}{5}\int x\,cos\,5x\ dx = -\frac{\left(3x^2 - 2\right)\ cos\,5x}{5} + \frac{6}{5} I_1 \quad (*)$$

Hemos llamado $I_1 = \int x\ cos\,5x\ dx$ , integral que debemos resolver.

Intentamos resolver $I_1$ utilizando el método de integración por partes:

Hacemos $\begin{cases} u = x \\ dv = cos\,5x\ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int cos\,5x\ dx = \dfrac{sen\ 5x}{5} \end{cases} \quad (C\ al\ final)$

Aplicando la fórmula y substituyendo:

$$I_1 = \int x\ cos\,5x\ dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du = x\frac{sen\,5x}{5} - \int \frac{sen\,5x}{5} dx = \frac{x\ sen\,5x}{5} - \frac{1}{5}\int sen\,5x\ dx =$$

$$= \frac{x\ sen\,5x}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{-cos\,5x}{5} + C = \frac{x\ sen\,5x}{5} + \frac{cos\,5x}{25} + C$$

Substituyendo en la referencia (*) :

$$I = -\frac{\left(3x^2 - 2\right)\ cos\,5x}{5} + \frac{6}{5} I_1 = -\frac{\left(3x^2 - 2\right)\ cos\,5x}{5} + \frac{6}{5}\left[\frac{x\,sen\,5x}{5} + \frac{cos\,5x}{25} + C\right] =$$

$$= -\frac{\left(3x^2 - 2\right)\ cos\,5x}{5} + \frac{6x\,sen\,5x}{25} + \frac{6\ cos\,5x}{125} + C$$

## Ejercicio 139.-

Resolver la integral $I = \int cos\ Lx\ dx$

**Solución:**

Método por partes. Hacemos: $\begin{cases} u = cos\ Lx \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\ sen\ Lx \cdot \dfrac{1}{x} \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$

Aplicando la fórmula y substituyendo:

$$I = \int cos\ Lx\ dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du = cos\ Lx \cdot x - \int x\frac{-\ sen\ Lx}{x}\ dx = x\ cos\ Lx + \int sen\ Lx\ dx =$$

$$= x\ cos\ Lx + I_1 \quad (*)$$

Hemos llamado $I_1 = \int sen\ Lx\ dx$ , integral que debemos resolver.

Resolvemos $I_1$ por el método "por partes".

Hacemos: $\begin{cases} u = sen\, Lx \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = cos\, Lx \cdot \dfrac{1}{x} \\ v = \int dv = \int dx = x \;\; (C \; al \;\; final) \end{cases}$

Aplicamos la fórmula y substituimos:

$$I_1 = \int sen\, Lx \; dx = \int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du = x \;\, sen\, Lx \; - \; \int x \frac{cos\, Lx}{x} dx = x \;\, sen\, Lx \; - \int cos\, Lx \; dx =$$
$$= x \;\, sen\, Lx - I$$

Substituyendo en la referencia (*) :

$$I = \int cos\, Lx \;\, dx = \underbrace{x \cos Lx + \left( x\, sen\, Lx - I \right)}_{dejamos\ la\ constante\ para\ el\ final} = x \cos Lx + x\, sen\, Lx - I$$

$$2I = x \cos Lx + x\, sen\, Lx$$

$$Despejando\!: \;\; I = \int cos\, Lx \;\, dx = \frac{x \cos Lx + x\, sen\, Lx}{2} + C$$

# 10.Integración de funciones racionales.-

Una función racional es una función $f(x)$ de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ en la que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas.

Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{5x^2 - 6x + 8}{x^3 + x^2 - 3x - 5}$ es una función racional en la que $p(x)=5x^2$& $6x + 8$ es el polinomio numerador (grado 2) y $q(x) = x^3 + x^2$ & $3x$ & $5$ es el polinomio denominador cuyo grado es 3.

Tratamos en este apartado la forma de resolver la integral de una función racional. Veamos como:

L Sea $f(x) = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ una función racional .

Observa que $\begin{cases} grado\ del\ numerador\ = \ m \\ grado\ del\ denominador = n \end{cases}$

L Queremos resolver $\int f(x)\, dx = \int \dfrac{p(x)}{q(x)} dx = \int \dfrac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + b_1 x + b_0} dx$

L El método consiste en descomponer la función $f(x)$ en una suma de funciones más sencillas de integrar, es decir, intentamos conseguir que $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)$, esto es, que $f(x)$ es la suma de k funciones más fáciles de integrar.

L Una vez conseguida la descomposición de $f(x)$ en una suma (o resta) de funciones, podemos utilizar una de las propiedades de las integrales: "*la integral de una suma es igual a la suma de las integrales*":

$$\int f(x)\, dx = \int \left[\, f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x) \,\right] dx = \int f_1(x)\, dx \; + \; \cdots \; + \; \int f_k(x)\, dx$$

siendo cada una de la integrales $\int f_i(x)\, dx \;\; i = 1,2,3,\ldots,k$ de fácil resolución.

L Antes de aplicar el método de integración que veremos a continuación, debemos distinguir dos casos:

**Caso I.-** $m < n \Rightarrow$ *grado del polinomio numerador* $<$ *grado del polinomio denominador*

**Caso II.-** $m \geq n \Rightarrow$ *grado del polinomio numerador* $\geq$ *grado del polinomio denominador*

Estudiemos cada uno de los casos:

## 10.1.Caso I.-

Sea la función $f(x) = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ cuya integral buscamos, es decir, pretendemos hallar el conjunto de sus primitivas.

Recordemos que se verifica que $m < n$

En este caso hay que distinguir tres situaciones:

**Caso I.a.-** El polinomio denominador $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_0$ tiene ***todas sus raíces reales y distintas,*** *es decir*:
$x_1, x_2, x_3, \ldots.. , x_n \Rightarrow$ son las n raíces reales de $q(x)$. Todas distintas.

**Caso I.b.-** El polinomio denominador tiene todas sus raíces reales, pero ***algunas de ellas se repiten 1 o más veces***, es decir:

$x_1$ es una raíz de $q(x)$ que aparece $\alpha_1$ veces.
$x_2$ es una raíz de $q(x)$ que aparece $\alpha_2$ veces.
$x_3$ es una raíz de $q(x)$ que aparece $\alpha_3$ veces.
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$x_k$ es una raíz de $q(x)$ que aparece $\alpha_k$ veces.

En este caso el número total de raíces que tiene el polinomio $q(x)$ es la suma $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots\cdots + \alpha_k$ , pero raíces distintas hay k.

**Caso I.c.-** El polinomio denominador tiene una o más raíces complejas (quede claro que también puede haber raíces reales).

Con el objetivo de repasar estos conceptos, veremos algunos ejemplos sobre raíces de un polinomio y su posterior factorización (descomposición en factores).

## Ejemplo 36.-

Sea el polinomio de grado 1 $q(x) = 5x + 9$. Pretendemos hallar sus raíces y factorizarlo en función de ellas.

Veamos:

T Raíz de un polinomio es todo número (real o complejo) que hace que su valor sea 0.

T Para hallar las raíces de $q(x)$ debemos resolver la ecuación $q(x) = 0$

$$q(x) = 0 \Rightarrow 5x + 9 = 0 \Rightarrow 5x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{5}$$

T Por tanto, $x = -\frac{9}{5}$ es el único valor que hace que $q\left(\frac{-9}{5}\right) = 0$, es decir, $x = -\frac{9}{5}$ es la única raíz del polinomio $q(x)$, que en este caso es número real.

T Podemos expresar $q(x) = 5x + 9$ como un producto de factores en el que intervenga la raíz hallada. Veamos:

$$q(x) = 5x + 9 = 5\left(x - \frac{-9}{5}\right) = 5\left(x + \frac{9}{5}\right) \quad \xleftarrow{\text{observa}} \quad q(x) = 5\left(x - la\, raiz\right)$$

## Ejemplo 37.-

Sea el polinomio de grado 2 $q(x) = 3x^2 + 6x - 105$, del cual pretendemos hallar sus raíces y factorizarlo.

Veamos:

X $x$ es una raíz de $q(x)$ sí y sólo sí $q(x) = 0$

X Debemos resolver la ecuación de 2º grado $3x^2 + 6x - 105 = 0$

X Resolvemos: $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 3\cdot(-105)}}{2\cdot 3} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+1260}}{6} = \dfrac{-6 \pm 36}{6} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

X En este caso hay dos valores reales distintos ( $x_1 = 5$ y $x_2 = -7$ ) que anulan al polinomio, es decir, el polinomio $q(x)$ tiene dos raíces reales distintas.

X Ahora podemos factorizar $q(x)$: $q(x) = 3x^2 + 6x - 105 = 3\cdot(x-5)\cdot(x+7)$

**Nota:** Observa que el primer factor “3" es el coeficiente del término de mayor grado.

X En este caso es correcta la expresión de que “*el polinomio* $q(x)$ *tiene dos raíces reales simples*”.

## Ejemplo 38.-

Sea el polinomio $q(x) = x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 13x^3 - 34x^2 + 28x - 8$. Pretendemos hallar sus raíces y factorizarlo.

Veamos:

± $q(x) = x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 13x^3 - 34x^2 + 28x - 8$ es un polinomio de grado 6.

± $q(x)$ puede tener raíces reales o puede que no tenga raíces reales.

± Si tiene raíces reales ( números reales), puede que alguna (o todas) sean entera (número entero) o que ninguna sea entera.

± Si $q(x)$ tiene alguna raíz entera, esta debe ser un divisor del término independiente, es decir, las raíces enteras del polinomio $q(x)$ deben estar entre los divisores de $-8$, o lo que es lo mismo, entre los divisores de 8.

± Comprobemos si algún divisor de 8 es raíz entera de $q(x)$ :

Divisores de 8 = { 1, $-1$, 2, $-2$, 4, $-4$, 8, $-8$ }

Probemos con $x = 1$ : $q(1) = 1-5+5+13-34+28-8 = 0$ ⇒ 1 es una raíz de $q(x)$

± Por ser 1 una raíz del polinomio $q(x)$, se verifica (por el teorema del resto) que la división $q(x) : (x-1)$ es exacta.

± Efectuemos esa división por el método de Ruffini:

$( x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 13x^3 - 34x^2 + 28x - 8 ) : ( x-1)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | 5 | 13 | −34 | 28 | −8 |
| 1 | | 1 | −4 | 1 | 14 | −20 | 8 |
| | 1 | −4 | 1 | 14 | −20 | 8 | 0 |

± Del resultado de la división anterior deducimos que:

Dividendo: $q(x) = x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 13x^3 - 34x^2 + 28x - 8$

divisor: $x-1$

cociente: $c_1(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 14x^2 - 20x + 8$

resto : 0

± Recordando que Dividendo = divisor × cociente + resto:

$q(x) = (x-1)\cdot(x^5 - 4x^4 + x^3 + 14x^2 - 20x + 8)$ (*)

Tenemos factorizado el polinomio $q(x)$ , pero debemos ver si podemos descomponerlo en más factores.

¸ Intentemos descomponer en factores $c_1(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 14x^2 - 20x + 8$

Probemos si algún divisor de 8 (término independiente) es una raíz entera.

Para $x = 1$ : $c_1(1) = 1^5 - 4\cdot 1^4 + 1^3 + 14\cdot 1^2 - 20\cdot 1 + 8 = 1 - 4 + 1 + 14 - 20 + 8 = 0$

Por tanto, 1 es una raíz de $c_1(x)$, lo que significa que la división $c_1(x) : (x\&1)$ es exacta.

± Efectuemos esa división por el método de Ruffini:

$(x^5 \& 4x^4 + x^3 + 14x^2 \& 20x + 8) : (x\&1)$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | &4 | 1 | 14 | &20 | 8 |
| 1 | | 1 | &3 | &2 | 12 | &8 |
| | 1 | &3 | &2 | 12 | &8 | 0 |

± Del resultado de la división anterior deducimos que:

Dividendo: $c_1(x) = x^5 \& 4x^4 + x^3 + 14x^2 \& 20x + 8$

divisor: $x\&1$

cociente: $c_2(x) = x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8$

resto : 0

± Recordando que Dividendo = divisor × cociente + resto:

$c_1(x) = x^5 \& 4x^4 + x^3 + 14x^2 \& 20x + 8 = (x\&1)\cdot(x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8)$

± Substituyendo en la referencia (*) :

$q(x) = (x\&1)\cdot(x^5 \& 4x^4 + x^3 + 14x^2 \& 20x + 8) = (x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8)$(**)

Tenemos factorizado el polinomio $q(x)$ en producto de tres factores, pero debemos ver si podemos descomponerlo en más factores. Para ello intentaremos encontrar raíces enteras del polinomio $c_2(x) = x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8$.

± Si $c_2(x) = x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8$ tiene alguna raíz entera, estará entre los divisores de su término independiente, &8.

Probemos con $x = 1$: $c_2(1) = 1^4 \& 3\cdot1^3 \& 2\cdot1^2 + 12\cdot1 \& 8 = 1\&3\&2 + 12 \& 8 = 0$

Por tanto, 1 es una raíz entera de $c_2(x) = x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8$

La división $c_2(x) : (x\&1)$ es exacta.

± Efectuemos esa división por el método de Ruffini:

$(x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8) : (x\&1)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | &3 | &2 | 12 | &8 |
| 1 | | 1 | &2 | &4 | 8 |
| | 1 | &2 | &4 | 8 | 0 |

± Del resultado de la división anterior deducimos que:

Dividendo: $c_2(x) = x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8$

divisor: $x\&1$

cociente: $c_3(x) = x^3 \& 2x^2 \& 4x + 8$

resto : 0

± Recordando que Dividendo = divisor × cociente + resto:

$c_2(x) = x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8 = (x\&1)\cdot(x^3 \& 2x^2 \& 4x + 8)$

± Substituyendo en la referencia (**) :

$q(x) = (x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x^4 \& 3x^3 \& 2x^2 + 12x \& 8) = (x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x^3 \& 2x^2 \& 4x + 8)$ (***)

Tenemos factorizado el polinomio $q(x)$ en producto de cuatro factores, pero debemos ver si podemos descomponerlo en más factores. Para ello intentaremos encontrar raíces enteras del polinomio $c_3(x) = x^3 \& 2x^2 \& 4x + 8$.

± Si $c_3(x) = x^3 \& 2x^2 \& 4x + 8$ tiene alguna raíz entera, estará entre los divisores de su término independiente, 8.

Probemos con $x = 1$: $c_3(1) = 1^3 \& 2\cdot1^2 \& 4\cdot1 + 8 = 1\&2 \& 4 + 8 = 3$ … 0

Por tanto, 1 **no es** una raíz entera de $c_3(x) = x^3 \& 2x^2 \& 4x + 8$

Probemos con $x = \&1$: $c_3(\&1) = (\&1)^3 \& 2\cdot(\&1)^2 \& 4\cdot(\&1) + 8 = \&1\&2 + 4 + 8 = 9$ … 0

Por tanto, 1 **no es** una raíz entera de $c_3(x) = x^3 \& 2x^2 \& 4x + 8$

Probemos con $x = 2$: $c_3(2) = 2^3 \& 2\cdot2^2 \& 4\cdot2 + 8 = 8\&8\&8 + 8 = 0$

Por tanto, 2 **es** una raíz entera de $c_3(x) = x^3 \& 2x^2 \& 4x + 8$

La división $c_3(x) : (x\&2)$ es exacta.

± Efectuemos esa división por el método de Ruffini:

$(x^3 \&2x^2 \& 4x + 8) : (x\&2)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | &2 | &4 | 8 |
| 2 | | 2 | 0 | &8 |
| | 1 | 0 | &4 | 0 |

± Del resultado de la división anterior deducimos que:

Dividendo: $c_3(x) = x^3 \&2x^2 \& 4x + 8$

divisor: $x\&2$

cociente: $c_4(x) = x^2 \& 4$

resto : 0

± Recordando que Dividendo = divisor × cociente + resto:

$c_3(x) = x^3 \&2x^2 \& 4x + 8 = (x\&2)\cdot(x^2 \& 4)$

± Substituyendo en la referencia (***) :

$q(x) = (x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x^3 \&2x^2 \& 4x + 8) = (x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x\&2)\cdot(x^2 \& 4)$ (****)

Tenemos factorizado el polinomio $q(x)$ en producto de cinco factores, pero debemos ver si podemos descomponerlo en más. Para ello intentaremos descomponer $c_4(x) = x^2 \& 4$.

Este polinomio se puede descomponer directamente:

$c_4(x) = x^2 \& 4 = x^2 \& 2^2 = (x + 2)\cdot(x\&2)$

± Substituyendo en la referencia (****) :

$$\boxed{q(x) = x^6 \& 5x^5 + 5x^4 + 13x^3 \& 34x^2 + 28\,x \& 8 = (x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x\&1)\cdot(x\&2)\cdot(x \& 2)\cdot(x+2)}$$

De otra forma:

$$\boxed{q(x) = x^6 \& 5x^5 + 5x^4 + 13x^3 \& 34x^2 + 28\,x \& 8 = (x\&1)^3 \cdot(x\&2)^2\cdot(x+2)}$$

± La expresión anterior se interpreta de la siguiente forma:

El polinomio $q(x)$ tiene seis raíces, todas enteras : 1, 1, 1, 2, 2, &2.

De las seis raíces, tres son distintas: 1, 2 y &2.

La raíz $x = 1$ se dice que es triple

La raíz $x = 2$ se dice que es doble

La raíz $x = \&2$ se dice que es simple

## Ejemplo 39.-

Dado el polinomio de segundo grado $p(x) = 8x^2 - 2x - 15$, queremos hallar sus raíces y factorizarlo.

Veamos:

ö Resolvemos la ecuación $8x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 480}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{484}}{16} = \frac{2 \pm 22}{16} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+22}{16} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = \dfrac{2-22}{16} = \dfrac{-20}{16} = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

ö Vemos que el polinomio tiene dos raíces reales racionales (fracciones) distintas.

ö Para factorizar hay que considerar el coeficiente del término de mayor grado, es decir:

$$p(x) = 8x^2 - 2x - 15 = 8\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{5}{4}\right) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)4\left(x + \frac{5}{4}\right) = \left(2x - 3\right)\left(4x + 5\right)$$

## Ejemplo 40.-

Queremos hallar las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ y factorizarlo.

Veamos:

û Se trata de un polinomio de grado 3. Si tiene alguna raíz entera, debe estar entre los divisores del término independiente &3.
Divisores de &3 = { 1, &1, 3, &3 }

û Probamos:

$$p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 - 3 = 1 - 3 + 1 - 3 = -4 \neq 0$$

$$p(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1) - 3 = -1 - 3 - 1 - 3 = -8 \neq 0$$

$$p(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 27 - 27 + 3 - 3 = 0 \Rightarrow \;\; x = 3 \;\; es\ raiz\ \ de\ \ p(x)$$

û La división $\left(x^3 - 3x^2 + x - 3\right) : (x - 3)$ es exacta. La efectuamos por el método de Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | &3 | 1 | &3 |
| 3 | | 3 | 0 | 3 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |

Cociente: $c(x) = x^2 + 1$

Por tanto: $x^3 - 3x^2 + x - 3 =: (x - 3) \cdot \left(x^2 + 1\right)$

û Ahora intentemos factorizar el polinomio $c(x) = x^2 + 1$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \; x^2 = -1 \Rightarrow \; x = \pm\sqrt{-1} = \begin{cases} x_1 = i \quad (n^{o}\ complejo\ \ puro) \\ x_2 = -i \;\; (n^{o}\ complejo\ \ puro) \end{cases}$$

Por tanto: $c(x) = x^2 + 1 = (x + i)\,(x$ & $i)$

û En definitiva:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 =: (x - 3) \cdot \left(x^2 + 1\right) = (x - 3)(x + i)(x - i)$$

El polinomio $p(x)$ tiene tres raíces: $\begin{cases} x_1 = i \quad raiz\ compleja \\ x_2 = -i \;\; raiz\ compleja \\ x_3 = 3 \;\; raiz\ real\ \ y\ \ entera \end{cases}$

Una vez vistos los distintos ejemplos sobre factorización de polinomios pasaremos al estudio de la resolución de integrales de cada uno de los apartados del caso I.

### 10.1.1 Estudio del caso Ia.-

P Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ una función tal que:

3 grado del numerador = $m$ < grado del denominador = $n$

3 el polinomio denominador $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_0$ tiene $n$ raíces reales y distintas: $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n$

P Queremos hallar la integral:

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} dx$$

P Es posible demostrar que la función $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ puede expresarse de la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \frac{A_3}{x - x_3} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

en la que $A_1, A_2, A_3 , \ldots , A_n$ son números reales fáciles de calcular.

P Entonces podemos resolver la integral de la siguiente forma:

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} dx =$$

$$= \int \left( \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{x-x_n} \right) dx = \int \frac{A_1}{x-x_1}dx + \int \frac{A_2}{x-x_2}dx + \int \frac{A_3}{x-x_3}dx + \cdots + \int \frac{A_n}{x-x_n}dx =$$

$$= A_1 \int \frac{1}{x-x_1}dx + A_2 \int \frac{1}{x-x_2}dx + A_3 \int \frac{1}{x-x_3}dx + \cdots\cdots + A_n \int \frac{1}{x-x_n}dx = (\textit{integrales inmediatas}) =$$

$$= A_1\, L\left| x - x_1 \right| + A_2\, L\left| x - x_2 \right| + A_3\, L\left| x - x_3 \right| + \cdots\cdots + A_n\, L\left| x - x_n \right|$$

## Ejemplo 41.-

Vamos a resolver la integral $I = \displaystyle\int \frac{6x - 5}{x^2 + x - 20} dx$

Veamos:

O Se trata de la integral de una función racional.
Numerador: $p(x) = 6x - 5$ polinomio de grado $m = 1$
Denominador: $q(x) = x^2 + x - 20$ polinomio de grado $n = 2$
Por tanto, estamos en el **caso I**

$\boxed{m < n}$

O Ahora debemos averiguar si estamos en **I.a** , **I.b** o **I.c**
Hallemos las raíces del denominador:

$$q(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

El polinomio denominador tiene dos raíces reales distintas (4 y −5) y $q(x) = (x-4)\,(x+5)$
Por tanto, estamos en el caso **I.a**

O Expresemos la función integrando como suma de funciones más sencillas:

$$f(x) = \frac{6x-5}{x^2+x-20} = \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{x+5} \quad \leftarrow \quad \textit{Buscamos } A_1 \textit{ y } A_2$$

$$\textit{Operando}: \ \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{x+5} = \frac{A_1\,(x+5) + A_2\,(x-4)}{(x-4)\,(x+5)} = \frac{6x-5}{x^2+x-20} = f(x)$$

$$\textit{Deducimos}: \ A_1\,(x+5) + A_2\,(x-4) = 6x - 5 \quad \leftarrow \quad \textit{Buscamos } A_1 \textit{ y } A_2$$

$A_1$ y $A_2$ son dos números reales que hacen la igualdad $A_1\,(x-4) + A_2\,(x+5) = 6x-5$ válida para ***cualquier*** valor de $x$. Según esto, le damos a $x$ los valores que queramos y obtendremos una igualdad:

T Para $x = 4$ tenemos que $A_1\,(4-4) + A_2\,(4+5) = 6{\cdot}4-5$

$0{\cdot}A_1 + 9{\cdot}A_2 = 19$ ; $9{\cdot}A_2 = 19 \Rightarrow A_2 = \frac{19}{9}$

T Para $x$ = &5 tenemos que $A_1$ (&5&4) + $A_2$ (&5+5) = 6·(&5)&5

&9·$A_1$ + 0·$A_2$ = 19 ; &9·$A_1$ = &35 $\Rightarrow A_1 = \frac{35}{9}$

Por tanto:

$$f(x) = \frac{6x-5}{x^2+x-20} = \frac{\frac{19}{9}}{x-4} + \frac{\frac{35}{9}}{x+5} = \frac{19}{9(x-4)} + \frac{35}{9(x+5)}$$

O Ahora podemos resolver la integral:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{6x-5}{x^2+x-20}\,dx = \int\left(\frac{19}{9(x-4)} + \frac{35}{9(x+5)}\right)dx = \int \frac{19}{9(x-4)}\,dx + \int \frac{35}{9(x+5)}\,dx =$$

$$= \frac{19}{9}\int \frac{1}{x-4}\,dx + \frac{35}{9}\int \frac{1}{x+5}\,dx = \frac{19}{9} L\left|x-4\right| + \frac{35}{9} L\left|x+5\right| + C$$

En definitiva:

$$\boxed{I = \int \frac{6x-5}{x^2+x-20}\,dx = \frac{19}{9} L\left|x-4\right| + \frac{35}{9} L\left|x+5\right| + C}$$

## Ejercicio 140.-

Resolver la integral $I = \int \frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6}\,dx$

**Solución:**

M Comparamos los grados de los polinomios numerador y denominador:

$$\left.\begin{matrix} grado\ numerador\ \ p(x) = 2 \\ grado\ denominador\ \ q(x) = 3 \end{matrix}\right\} 2 < 3 \Rightarrow\ Caso\, I.$$

M Hallamos las raíces del polinomio denominador. Para ello debemos resolver una ecuación de grado 3. Como no conocemos un método estándar para resolver una ecuación de este tipo, intentamos averiguar si existe alguna raíz entera.
Si $q(x)$ tiene alguna raíz entera, debe estar entre los divisores del término independiente.
Divisores de 6 = { 1, &1, 2, &2, 3,&3, 6, &6 }

M Probemos con los divisores para ver si alguno es raíz de $q(x)$ :
Para $x$ = 1 tenemos que q(1) = $1^3$&2·$1^2$ & 5·1+ 6 = 1&2&5 + 6 = 0
Por tanto, $x$ = 1 *es una raíz entera del polinomio* $q(x)$

M La división ( $x^3$&2$x^2$ & 5$x$ + 6 ) : ($x$&1) es exacta. La efectuamos:

| | 1 | &2 | &5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | &1 | &6 |
| | 1 | &1 | &6 | 0 |

Cociente: $c(x)$ = $x^2$ &$x$&6
resto r = 0
Dividendo = divisor × cociente + resto
$x^3$&2$x^2$ & 5$x$ + 6 = ($x$&1)·($x^2$ &$x$&6)

Ya tenemos factorizado el polinomio denominador, pero intentemos descomponerlo en más factores. Par ello, hallemos las raíces de $c(x)$ = $x^2$ &$x$&6 :

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

De lo anterior deducimos: $x^2$ &$x$&6 = ($x$&3)·($x$ + 2)

M Ya tenemos factorizado al máximo el polinomio denominador de la función integrando:

$$q(x) = x^3 - 2x - 5x + 6 = (x-1)\cdot(x-3)\cdot(x+2)$$

$$siendo \begin{cases} x = 1 \quad raiz\ entera\,(real)\ de\ \ q(x)\ \ (observa\ que\ \ q(1) = 0) \\ x = 3 \quad raiz\ entera\ (real)de\ \ q(x)\ \ (observa\ que\ \ q(3) = 0) \\ x = -2 \ \ raiz\ entera\ (real)de\ \ q(x)\ \ (observa\ que\ \ q(-2) = 0) \end{cases}$$

Por tanto, el polinomio $q(x)$ tiene tres raíces reales, es decir, estamos en el **caso I.a**

M Descomponemos la función integrando en suma de varias funciones más sencillas:

$$f(x) = \frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{5x^2-19x+2}{(x-1)(x-3)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{x+2} \ \leftarrow\ Buscamos\ A_1, A_2\ \ y\ \ A_3$$

Operando:

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{x+2} = \frac{A_1(x-3)(x+2) + A_2(x-1)(x+2) + A_3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)} = \frac{5x^2-19x+2}{(x-1)(x-3)(x+2)}$$

$$Deducimos\ que\ \ A_1(x-3)(x+2) + A_2(x-1)(x+2) + A_3(x-1)(x-3) = 5x^2 - 19x + 2$$

La igualdad anterior es válida para cualquier valor de $x$, por lo que :

$$\begin{cases} para\ \ x = 1 \Rightarrow\ A_1\cdot(-2)\cdot 3 + A_2\cdot 0\cdot 3 + A_3\cdot 0\cdot(-2) = -12 \Rightarrow\ -6A_1 = -12 \Rightarrow\ A_1 = 2 \\ para\ \ x = 3 \Rightarrow\ A_1\cdot 0\cdot 5 + A_2\cdot 2\cdot 5 + A_3\cdot 2\cdot 0 = -12 \Rightarrow\ 10A_2 = -10 \Rightarrow\ A_2 = -1 \\ para\ \ x = -2 \Rightarrow\ A_1\cdot(-5)\cdot 0 + A_2\cdot(-3)\cdot 0 + A_3\cdot(-3)\cdot(-5) = 60 \Rightarrow\ 15A_3 = 60 \Rightarrow\ A_3 = 4 \end{cases}$$

Por tanto:

$$f(x) = \frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{5x^2-19x+2}{(x-1)(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x-3} + \frac{4}{x+2}$$

M Volvemos a la integral:

$$I = \int \frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6}\,dx = \int\left[\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-3} + \frac{4}{x+2}\right]dx = \int\frac{2}{x-1}\,dx - \int\frac{1}{x-3}\,dx + \int\frac{4}{x+2}\,dx =$$

$$= 2\int\frac{1}{x-1}\,dx - \int\frac{1}{x-3}\,dx + 4\int\frac{1}{x+2}\,dx = 2\,L\left|x-1\right| - L\left|x-3\right| + 4\,L\left|\,x+2\,\right| + C$$

Por tanto:

$$\boxed{I = \int\frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6}\,dx = 2\,L\left|\,x-1\right| - L\left|\,x-3\right| + 4\,L\left|\,x+2\,\right| + C}$$

## Ejercicio 141.-

Resolver la integral $I = \int \frac{4x+7}{2x^2-4x-96}\,dx$

**Solución:**

Se trata de la integral de una función racional en la que el grado del numerador es 1 y el denominador es 2. Estamos en el **caso I**. Intentemos hallar las raíces del polinomio denominador:

$$2x^2 - 4x - 96 = 0\ \ \ ecuaciòn\ de\ 2^o\ grado$$

$$Simplificando:\ 2\cdot\left(x^2 - 2x - 48\right) = 0\ \ ;\ \ x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$Resolviendo:\ x = \frac{2\pm\sqrt{4+192}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{196}}{2} = \frac{2\pm 14}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{16}{2} = 8 \\ x_2 = \frac{-12}{2} = -6 \end{cases}$$

El denominador tiene dos raíces reales (8 y &6) distintas. Estamos en el **caso I.a**

Ahora podemos factorizar el polinomio denominador (no olvidar el coeficiente de $x^2$):

$$\begin{cases} \textit{De la ecuación resuelta } x^2 - 2x - 48 = 0 \textit{ sacamos que } x^2 - 2x - 48 = (x-8)(x+6) \\ \textit{Del polinomio denominador tenemos: } 2(x^2 - 2x - 48) = 2x^2 - 4x - 96 = 2(x-8)(x+6) \end{cases}$$

Podemos descomponer la función integrando en suma de funciones más sencillas:

$$f(x) = \frac{4x+7}{2x^2-4x-96}dx = \frac{4x+7}{2(x-8)(x+6)} = \frac{4x+7}{(2x-16)(x+6)} = \frac{A_1}{2x-16} + \frac{A_2}{x+6} \leftarrow \textit{Buscamos } A_1 \textit{ y } A_2$$

$$\textit{Operando: } \frac{A_1}{2x-16} + \frac{A_2}{x+6} = \frac{A_1(x+6) + A_2(2x-16)}{(2x-16)(x+6} = \frac{4x+7}{(2x-16)(x+6)} = f(x)$$

*Deducimos que*: $A_1(x+6) + A_2(2x-16) = 4x+7$

$$\textit{Damos valores a } x\text{:} \begin{cases} x = 8 \Rightarrow 14A_1 = 39 \Rightarrow A_1 = \frac{39}{14} \\ x = -6 \Rightarrow -28A_2 = -17 \Rightarrow A_2 = \frac{17}{28} \end{cases}$$

Por tanto:

$$f(x) = \frac{4x+7}{2x^2-4x-96} = \frac{\frac{39}{14}}{2(x-8)} + \frac{\frac{17}{28}}{x+6} = \frac{39}{28(x-8)} + \frac{17}{28(x+6)}$$

Volviendo a la integral:

$$I = \int \frac{4x+7}{2x^2-4x-96}dx = \int \left[\frac{39}{28(x-8)} + \frac{17}{28(x+6)}\right]dx = \int \frac{39}{28(x-8)}dx + \int \frac{17}{28(x+6)}dx = \frac{39}{28}\int \frac{1}{x-8}dx + \frac{17}{28}\int \frac{1}{x+6}dx =$$

$$= \frac{39}{28} L\left|x-8\right| + \frac{17}{28} L\left|x+6\right| + C$$

En definitiva:

$$\boxed{I = \int \frac{4x+7}{2x^2-4x-96}dx = \frac{39}{28} L\left|x-8\right| + \frac{17}{28} L\left|x+6\right| + C}$$

## Ejercicio 142.-

Hallar el conjunto de las funciones primitivas de $f(x) = \dfrac{-x^2+x-6}{15x^3-6x^2-15x+6}$

**Solución:**

º Se trata de resolver la integral $I = \int f(x)\,dx = \int \dfrac{-x^2+x-6}{15x^3-6x^2-15x+6}dx$

º Como el integrando es una función racional, analicemos el caso de que se trata:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{numerador } p(x) = -x^2 + x - 6 \rightarrow \textit{ grado } m = 2 \\ \textit{denominador } q(x) = 15x^3 - 6x^2 - 15x + 6 \rightarrow \textit{ grado } n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow m < n \Rightarrow \textit{caso I}$$

º Ahora hallemos las raíces del denominador. Veamos si tiene alguna raíz entera:
Divisores de 6 = { 1, &1, 2, &2, 3,&3, 6, &6 } ² posibles raíces enteras.
Vamos probando:
*x* = 1 Y *q*(1) = 15 & 6 & 15 + 6 = 0 Y *x* = 1 es una raíz entera (real) de *q*(*x*)
De lo anterior deducimos que la división ( 15*x*³&6*x*²&15*x* + 6 ) : (*x*&1) es exacta.
Efectuamos dicha división:

| | 15 | &6 | &15 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 15 | 9 | &6 |
| | 15 | 9 | &6 | 0 |

Cociente *c*(*x*) = 15*x*² + 9*x* & 6
Resto r = 0
Dividendo = divisor × cociente + resto
15*x*³&6*x*²&15*x* + 6 = (*x*&1)·(15*x*² + 9*x* & 6)

Ahora intentemos resolver la ecuación $15x^2 + 9x \& 6 = 0$ :

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81+360}}{30} = \frac{-9 \pm \sqrt{441}}{30} = \frac{-9 \pm 21}{30} = \begin{cases} x_2 = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \\ x_3 = \frac{-30}{30} = -1 \end{cases}$$

De la última ecuación : $15x^2 + 9x - 6 = 15\left(x - \frac{2}{5}\right)(x+1)$

Por tanto:

$$15x^3 + 6x^2 - 15x + 6 = (x-1) \cdot 15 \cdot \left(x - \frac{2}{5}\right) \cdot (x+1)$$

*Introduciendo el factor* 15 *en un parèntesis*:

$$15x^3 + 6x^2 - 15x + 6 = (x-1) \cdot (15x-6) \cdot (x+1)$$

Conclusiones:

— El polinomio denominador tiene tres raíces reales distintas:

$$x_1 = 1 \;;\; x_2 = \frac{2}{5} \;;\; x_3 = -1$$

— Se trata de una integral del **caso I.a**

º Descomponemos la función integrando en suma de funciones más simples:

$$f(x) = \frac{-x^2+x-6}{15x^3-6x^2-15x+6} = \frac{-x^2+x-6}{(x-1)(15x-6)(x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(15x-6)} + \frac{A_3}{(x+1)} \leftarrow \textit{ Buscamos } A_1, A_2 \textit{ y } A_3$$

Operando:

$$\frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(15x-6)} + \frac{A_3}{(x+1)} = \frac{A_1(15x-6)(x+1) + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1)(15x-6)}{(x-1)(15x-6)(x+1)} = \frac{-x^2+x-6}{(x-1)(15x-6)(x+1)} = f(x)$$

Como los denominadores son exactamente iguales, también lo serán los numeradores:

$$A_1(15x-6)(x+1) + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1)(15x-6) = -x^2+x-6$$

---

La igualdad anterior es válida para cualquier valor de $x$, por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} para\;\; x = 1 \Rightarrow 18\,A_1 = -6 \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{3} \\ para\;\; x = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{-3}{5}\cdot\frac{7}{5}A_2 = -\frac{144}{25} \Rightarrow \frac{-21}{25}A_2 = -\frac{144}{25} \Rightarrow A_2 = \frac{144}{21} = \frac{48}{7} \\ para\;\; x = -1 \Rightarrow 42\,A_3 = -8 \Rightarrow A_3 = -\frac{8}{42} \Rightarrow A_3 = -\frac{4}{21} \end{array}\right\}$$

Podemos poner la función $f(x)$ como la siguiente suma:

$$f(x) = \frac{\frac{-1}{3}}{(x-1)} + \frac{\frac{48}{7}}{(15x-6)} - \frac{\frac{4}{21}}{(x+1)} = \frac{-1}{3(x-1)} + \frac{48}{7(15x-6)} - \frac{4}{21(x+1)}$$

º Integrando:

$$I = \int f(x)\,dx = \int \frac{-x^2+x-6}{15x^3-6x^2-15x+6}dx = \int\left[\frac{-1}{3(x-1)} + \frac{48}{7(15x-6)} - \frac{1}{6(x+1)}\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx + \frac{48}{7}\int\frac{1}{(15x-6)}dx - \frac{1}{6}\int\frac{1}{x+1}dx = -\frac{1}{3}L\left|x-1\right| + \frac{48}{7}\cdot\frac{1}{15}L\left|15x-6\right| - \frac{1}{6}L\left|x+1\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{3}L\left|x-1\right| + \frac{16}{35}L\left|15x-6\right| - \frac{1}{6}L\left|x+1\right| + C$$

En definitiva:

$$\boxed{I = \int\frac{-x^2+x-6}{15x^3-6x^2-15x+6}dx = -\frac{1}{3}L\left|x-1\right| + \frac{16}{35}L\left|15x-6\right| - \frac{1}{6}L\left|x+1\right| + C}$$

## 10.1.2 Estudio del caso Ib.-

P Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$ una función tal que:

3 grado del numerador = $m$ < grado del denominador = $n$

3 el polinomio denominador $q(x) = b_nx^n + b_{n\&1}x^{n\&1} + ...... + b_1x + b_0$ tiene $n$ raíces reales, pero algunas están repetidas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \;\; raiz\ real\ de\ q(x)\ que\ aparece\ \alpha\ veces \\ x_2 \;\; raiz\ real\ de\ q(x)\ que\ aparece\ \beta\ veces \\ x_3 \;\; raiz\ real\ de\ q(x)\ que\ aparece\ \gamma\ veces \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k \;\; raiz\ real\ de\ q(x)\ que\ aparece\ \delta\ veces \end{array}\right\} \ siendo\ \ \alpha+\beta+\gamma+\cdots+\delta = n = grado\ q(x)$$

P Queremos hallar la integral:

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}dx$$

P Es posible demostrar que la función $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ puede expresarse de la forma:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = {} & \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{A_3}{(x-x_1)^3} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} + \\ & + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \frac{B_3}{(x-x_2)^3} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \\ & + \frac{C_1}{x-x_3} + \frac{C_2}{(x-x_3)^2} + \frac{C_3}{(x-x_3)^3} + \cdots + \frac{C_\gamma}{(x-x_3)^\gamma} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \frac{D_1}{x-x_k} + \frac{D_2}{(x-x_k)^2} + \frac{D_3}{(x-x_k)^3} + \cdots + \frac{D_\delta}{(x-x_k)^\delta} \end{aligned}$$

en la que $A_1, A_2, A_3$ , .... , $A_\alpha$, $B_1, B_2, B_3$ , .... , $B_\beta$ , $C_1, C_2, C_3$ , .... , $C_\gamma$ , .... , $D_1, D_2, D_3$, .... , $D_\delta$ son números reales fáciles de calcular.

P Entonces podemos resolver la integral de la siguiente forma:

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}dx =$$

$$= \int \left( \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{A_3}{(x-x_1)^3} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \cdots + \frac{D_\delta}{(x-x_k)^\delta} \right) dx =$$

$$= \int \frac{A_1}{x-x_1}dx + \int \frac{A_2}{(x-x_1)^2}dx + \cdots + \int \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha}dx + \cdots + \int \frac{C_1}{x-x_3}dx + \cdots + \int \frac{C_\gamma}{(x-x_3)^\gamma}dx + \cdots + \int \frac{D_\delta}{(x-x_k)^\partial}dx =$$

$$= A_1\int \frac{1}{x-x_1}dx + A_2\int \frac{1}{(x-x_1)^2}dx + \cdots + A_\alpha\int \frac{1}{(x-x_1)^\alpha}dx + \cdots + D_1\int \frac{1}{x-x_k}dx + \cdots + D_\delta\int \frac{1}{(x-x_k)^\delta}dx =$$

$= (integrales\ \ que\ \ se\ \ pueden\ \ resolver\ \ por\ \ cambio\ \ de\ \ variable)$

## Ejemplo 42.-

Imagina una función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ tal que grado de $p(x)$ menor que grado de $q(x)$

Imagina que $q(x)$ es una función polinómica de grado 6 que tiene las siguientes raíces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \textit{ es una raiz doble} \\ x_2 = -5 \textit{ es una raiz triple} \\ x_3 = 6 \textit{ es una raiz simple} \end{array}\right\} \textit{observa que } 2+3+1 = \textit{grado } q(x) = 6$$

Por tanto, $q(x)$ tiene seis raíces reales, de las cuales tres son distintas.

¡Pues bien!

Se verifica que:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x+5} + \frac{B_2}{(x+5)^2} + \frac{B_3}{(x+5)^3} + \frac{C_1}{x-6}$$

siendo $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$ números reales que se podrían hallar fácilmente.

## Ejercicio 143.-

Hallar el conjunto de las funciones primitivas de la función: $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4x+4}$

**Solución:**

9 Se trata de una función racional.

9 Pretendemos resolver la integral $\int f(x) = \int \dfrac{x-4}{x^2-4x+4}\,dx$

9 Veamos si es de caso I o II:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{numerador } p(x) = x-4\ ;\ \textit{grado } p(x) = 1 \\ \textit{denominador } q(x) = x^2 - 4x + 4\ ;\ \textit{grado } q(x) = 2 \end{array}\right\} \textit{grado } p(x) < \textit{grado } q(x)$$

Por tanto, estamos en el **caso I**

9 Veamos si se trata del caso I.a. I.b o I.c :

Para hallar las raíces de $q(x)$, resolvemos la ecuación de 2º grado $x^2$&$4x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = 2 \textit{ raiz doble}$$

Por tanto, el polinomio denominador tiene ***dos raíces reales iguales*** (una raíz doble).
Estamos en el **caso I.b.**

9 Conocer las raíces de $q(x)$, nos permite factorizarlo: $q(x) = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$

9 La función integrando podemos descomponerla en la siguiente suma:

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-4x+4} = \frac{x-4}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

*Considerando que el m.c.m de los denominadores es* $(x-2)^2$ *y operando*:

$$\frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} = \frac{A_1(x-2) + A_2}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

*Deducimos que* $A_1(x-2) + A_2 = x - 4 \leftarrow$ *Iguadad verdadera para todo* $x$

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{para } x = 2 \Rightarrow A_1 \cdot 0 + A_2 = -2 \Rightarrow A_2 = -2 \\ \textit{para } x = 4 \Rightarrow 2A_1 - 2 = 0 \Rightarrow 2A_1 = 2 \Rightarrow A_1 = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto: $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4x+4} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{(x-2)^2}$

9 Integrando: $\int f(x)\,dx = \int \dfrac{x-4}{x^2-4x+4}dx = \int \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{(x-2)^2}\right) dx = \int \dfrac{1}{x-2}dx - \int \dfrac{2}{(x-2)^2}\,dx$

Debemos resolver dos integrales: $I_1 = \int \frac{1}{x-2}dx \quad e \quad I_2 = \int \frac{2}{(x-2)^2}$

Resolvemos:

$$I_1 = \int \frac{1}{x-2}dx = L\left| x-2 \right| + C_1 \quad (\textit{integral inmediata})$$

$$I_2 = \int \frac{2}{(x-2)^2}dx = 2\int \frac{1}{(x-2)^2}dx = (*)$$

$$\textit{Por cambio de variable}: \begin{cases} t = x-2 \\ dt = dx \end{cases}$$

$$(*) = I_2 = 2\int \frac{1}{t^2}dt = 2\int t^{-2}dt = 2\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C_2 = 2\frac{t^{-1}}{-1} + C_2 = -2\frac{1}{t} + C_2 = \frac{-2}{x-2} + C_2$$

$$\textit{Por tanto}: \ I = I_1 - I_2 = L\left| x-2 \right| + C_1 - \frac{-2}{t} + C_2 = L\left| x-2 \right| + \frac{2}{x-2} + C$$

En definitiva:

$$\boxed{F(x) = L\left| x-2 \right| + \frac{2}{x-2} + C\,; \quad C \in R}$$

Funciones primitivas de $f(x)$

## Ejercicio 144.-

Resolver la integral $I = \int \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x^3 + x^2 - 4x - 3}dx$

**Solución:**

3 Se trata de la integral de una función racional.

3 En este caso es : grado numerador = 2 < 3 = grado denominador

Por tanto, estamos en el **caso I**

3 Hallemos las raíces del denominador $q(x) = 2x^3 + x^2$ & $4x$ &3

Busquemos raíces enteras: Divisores de &3 = { 1, &1, 3, &3 }

Probamos:

4 $x = 1$ ± $q(x) = 2{\cdot}1^3 + 1^2$ & $4{\cdot}1$ &3 = 2 + 1 & 4 & 3 = &4 ... 0 ;

4 $x =$ &1 ± $q(x) = 2{\cdot}($& $1)^3 + ($& $1)^2$ & $4{\cdot}($& 1) &3 = & 2 + 1 + 4 & 3 = 0 (

Hemos encontrado una raíz entera ( $x =$ &1) de $q(x) = 2x^3 + x^2$ & $4x$ &3

3 La división ( $2x^3 + x^2$ & $4x$ &3 ) : $(x + 1)$ es exacta. La efectuamos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | &4 | &3 |
| &1 | | &2 | 1 | 3 |
| | 2 | &1 | &3 | 0 |

Cociente $c(x) = 2x^2$ &$x$ & 3
Resto r = 0
Dividendo = divisor × cociente + resto
$2x^3 + x^2$&$4x$ & 6 = $(x+1){\cdot}(2x^2$ & $x$ & 3)

3 Ya tenemos que $q(x) = 2x^3 + x^2$&$4x$ & 6 = $(x+1){\cdot}(2x^2$ & $x$ & 3). Ahora intentemos hallar más raíces. Para ello resolvamos la ecuación $2x^2$ & $x$ & 3 = 0

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_3 = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

Por tanto: $(2x^2 - x - 3) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+1) = (2x-3)(x+1)$

3 Ya tenemos factorizado $q(x)$ : $2x^3 + x^2$ & $4x$ &3 = $(2x$&$3){\cdot}(x + 1)^2 = q(x)$

Además: $\begin{cases} x_1 = -1 \ \textit{raiz doble de } q(x) \\ x_2 = \frac{3}{2} \ \textit{raiz simple de } q(x) \end{cases}$

3 Por tanto, el polinomio denominador tiene tres raíces reales, una simple y una doble. Estamos en el **caso I.b**

3 La función integrando podemos descomponerla en suma de varias funciones:

$$\frac{4x^2-3x+1}{2x^3+x^2-4x-3} = \frac{4x^2-3x+1}{(2x-3)(x+1)^2} = \frac{A_1}{2x-3} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \leftarrow \textit{Buscamos } A_1, B_1 \textit{ y } B_2$$

*Operando y considerando que* $\textit{mcm de}\left\{2x-3,\ x+1,\ (x+1)^2\right\} = (2x-3)(x+1)^2$:

$$\frac{A_1}{2x-3} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} = \frac{A_1(x+1) + B_1(2x-3)(x+1) + B_2(2x-3)}{(2x-3)(x+1)^2} = \frac{4x^2-3x+1}{(2x-3)(x+1)^2}$$

*Deducimos que*: $A_1(x+1) + B_1(2x-3)(x+1) + B_2(2x-3) = 4x^2-3x+1 \leftarrow \textit{Buscamos } A_1, B_1 \textit{ y } B$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{para } x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}A_1 + 0 + 0 = 4\cdot\frac{9}{4} - 3\cdot\frac{3}{2} + 1 \Rightarrow \frac{5A_1}{2} = 9 - \frac{9}{2} + 1 \Rightarrow \frac{5A_1}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{11}{5} \\ \textit{para } x = -1 \Rightarrow 0 + 0 - 5B_2 = 4 + 3 + 1 \Rightarrow -5B_2 = 8 \Rightarrow B_2 = -\frac{8}{5} \\ \textit{para } x = 0 \Rightarrow A_1 - 3B_1 - 3B_2 = 0 - 0 + 1 \Rightarrow \frac{11}{5} - 3B_1 + \frac{24}{5} = 1 \Rightarrow -3B_1 = 1 - \frac{11}{5} + \frac{24}{5} \Rightarrow B_1 = -\frac{6}{5} \end{array}\right\}$$

*Por tanto*: $\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^3+x^2-4x-3} = \dfrac{\frac{11}{5}}{2x-3} + \dfrac{-\frac{6}{5}}{x+1} + \dfrac{-\frac{8}{5}}{(x+1)^2}$

3 Ahora podemos integrar:

$$I = \int \frac{4x^2-3x+1}{2x^3+x^2-4x-3}dx = \int\left[\frac{11}{5(2x-3)} - \frac{6}{5(x+1)} - \frac{8}{5(x+1)^2}\right]dx = \frac{11}{5}\int\frac{1}{2x-3}dx - \frac{6}{5}\int\frac{1}{x+1}dx - \frac{8}{5}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx =$$

$$= \frac{11}{5}L\left|2x-3\right|\cdot\frac{1}{2} - \frac{6}{5}L\left|x+1\right| - \frac{8}{5}I_1 \leftarrow \textit{debemos resolver } I_1 = \int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

*Resolvemos* $I_1 = \int\frac{1}{(x+1)^2}dx$

*Hacemos el cambio* $\begin{cases} t = x+1 \\ dt = dx \end{cases} \Rightarrow I_1 = \int\frac{1}{(x+1)^2}dx = \int\frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{t} + C = \frac{-1}{x+1} + C$

Substituyendo:

$$I = \int\frac{4x^2-3x+1}{2x^3+x^2-4x-3}dx = \frac{11}{10}L\left|2x-3\right| - \frac{6}{5}L\left|x+1\right| + \frac{8}{5(x+1)} + C$$

## 10.1.3 Estudio del caso Ic.-

P Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$ una función tal que:

3 grado del numerador = $m$ < grado del denominador = $n$

3 el polinomio denominador $q(x) = b_n x^n + b_{n\&1}x^{n\&1} + \ldots\ldots + b_1x + b_0$ tiene $n$ raíces reales y algunas complejas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \textit{ raiz real de } q(x) \textit{ que aparece } \alpha \textit{ veces} \\ x_2 \textit{ raiz real de } q(x) \textit{ que aparece } \beta \textit{ veces} \\ x_3 \textit{ raiz real de } q(x) \textit{ que aparece } \gamma \textit{ veces} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k \textit{ raiz real de } q(x) \textit{ que aparece } \delta \textit{ veces} \\ \textit{Además existen algunas raíces complejas.} \end{array}\right\} \textit{en este caso } \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \delta < n = \textit{grado } q(x)$$

P Lo anterior nos viene a decir que la descomposición del polinomio $q(x)$ sería de la forma:
$q(x) = b_n x^n + b_{n\&1}x^{n\&1} + \ldots\ldots + b_1x + b_0 =$
$= (x\&x_1)^{\alpha}\cdot(x\&x_2)^{\beta}\cdots\cdots(x\&x_k)^{\delta}\cdot(c_1x^2 + c_2x + c_3)\cdot(d_1x^2 + d_2x + c_3)\cdots(e_1x^2 + e_2x + e_3)$

en la que $(c_1 x^2 + c_2 x + c_3)$, $(d_1 x^2 + d_2 x + c_3)$,...., $(e_1 x^2 + e_2 x + e_3)$ son polinomios de segundo grado cuyas raíces son complejas, es decir:

La ecuación $c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = 0$ tiene soluciones complejas.
La ecuación $d_1 x^2 + d_2 x + c_3 = 0$ tiene soluciones complejas.
.......................................................................................
La ecuación $e_1 x^2 + e_2 x + e_3 = 0$ tiene soluciones complejas.

P Es posible demostrar que la función $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ puede expresarse de la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{A_3}{(x-x_1)^3} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{C_1}{x-x_3} + \frac{C_2}{(x-x_3)^2} + \frac{C_3}{(x-x_3)^3} + \cdots + \frac{C_\gamma}{(x-x_3)^\gamma} + \cdots + \frac{D_1}{x-x_k} + \frac{D_2}{(x-x_k)^2} + \frac{D_3}{(x-x_k)^3} + \cdots + \frac{D_\delta}{(x-x_k)^\delta} + \cdots$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{c_1 x^2 + c_2 x + c_3} + \frac{M_2 x + N_2}{d_1 x^2 + d_2 x + d_3} + \cdots\cdots + \frac{M_3 x + N_3}{e_1 x^2 + e_2 x + e_3}$$

P La integral quedaría:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-x_1}\,dx + \int \frac{A_2}{(x-x_1)^2}\,dx + \int \frac{A_3}{(x-x_1)^3}\,dx + \cdots + \int \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha}\,dx +$$
$$+ \int \frac{B_1}{x-x_2}\,dx + \int \frac{B_2}{(x-x_2)^2}\,dx + \cdots + \int \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta}\,dx + \cdots\cdots$$
$$+ \int \frac{C_1}{x-x_3}\,dx + \int \frac{C_2}{(x-x_3)^2}\,dx + \int \frac{C_3}{(x-x_3)^3}\,dx + \cdots + \int \frac{C_\gamma}{(x-x_3)^\gamma}\,dx + \cdots$$
$$+ \int \frac{D_1}{x-x_k}\,dx + \int \frac{D_2}{(x-x_k)^2}\,dx + \int \frac{D_3}{(x-x_k)^3}\,dx + \cdots + \int \frac{D_\delta}{(x-x_k)^\delta}\,dx + \cdots$$
$$+ \int \frac{M_1 x + N_1}{c_1 x^2 + c_2 x + c_3}\,dx + \int \frac{M_2 x + N_2}{d_1 x^2 + d_2 x + d_3}\,dx + \cdots\cdots + \int \frac{M_3 x + N_3}{e_1 x^2 + e_2 x + e_3}\,dx$$

siendo las últimas integrales de la suma anterior, de funciones racionales en las que el numerador es de grado 1 y el denominador de grado 2, pero sin raíces reales. Veremos en un ejemplo como se resuelve este tipo de integral.

## Ejemplo 43.-

Queremos hallar la integral $\int f(x)\,dx = \int \dfrac{1}{x^3 + x^2 + x}\,dx$

Veamos:

S El integrando es una función racional en la que $\begin{cases} grado\ numerador = 0 \\ grado\ denominador = 3 \end{cases}$

S Estamos en el **caso I** Debemos ver si es I.a., I.b o I.c
Hallemos las raíces de $q(x) = x^3 + x^2 + x$
$q(x) = x^3 + x^2 + x = x\cdot(x^2 + x + 1) = (x\&0)\cdot(x^2 + x + 1)$ Y $x = 0$ es una raíz real de $q(x)$
Ahora hallemos las raíces de $x^2 + x + 1$. Para ello resolvemos la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3\cdot(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Vemos que el polinomio $x^2 + x + 1$ tiene dos raíces complejas : $z_1$ y $z_2$

S Por tanto, el polinomio denominador tiene una raíz real ($x = 0$) y dos complejas. Estamos en el **caso I.c**

S Aunque la factorización no nos interesa en este caso, diremos que el polinomio denominador quedaría:

$$q(x) = x^3 + x^2 + x = x\cdot(x - z_1)\cdot(x - z_2) = x\cdot\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

A nosotros nos interesa, en este caso, la factorización $q(x) = x^3 + x^2 + x = x\cdot(x^2 + x + 1)$

S La función $f(x)$ puede expresarse como la siguiente suma:

$$f(x) = \frac{1}{x^3+x^2+x} = \frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-0} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} \leftarrow \textit{Debemos hallar } A,\ M \text{ y } N$$

Operando:

$$\frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Mx+N)x}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x(x^2+x+1)}$$

$$\textit{Deducimos que } A(x^2+x+1)+(Mx+N)x = 1 \leftarrow \textit{Buscamos } A, M \text{ y } N$$

$$\begin{cases} para\ x = 0 \Rightarrow A\cdot 1 + 0 = 1 \Rightarrow A = 1 \\ para\ x = 1 \Rightarrow 3A + M + N = 1 \Rightarrow 3 + M + N = 1 \Rightarrow M + N = -2 \\ Para\ x = -1 \Rightarrow A + M - N = 1 \Rightarrow 1 + M - N = 1 \Rightarrow M - N = 0 \end{cases}$$

$$\textit{Hallamos } M \text{ y } N \textit{ por el sistema}: \begin{cases} M + N = -2 \\ M - N = 0 \end{cases} \Rightarrow 2M = -2 \Rightarrow M = -1 \Rightarrow N = -1$$

Por tanto: $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2+x} = \dfrac{1}{x(x^2+x+1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-x-1}{x^2+x+1}$

S La integral quedaría:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-x-1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = L|x| - I_1$$

Debemos resolver la integral $I_1 = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$

Observa que es la integral de una función racional cuyo denominador ***no tiene*** raíces reales, ***tiene*** dos raíces complejas.

Veamos como se resuelve esta integral:

- Convertimos el denominador en un cuadrado perfecto más un número:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + 1 = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

- La integral queda: $I_1 = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx$

Hacemos el cambio $\begin{cases} t = x + \frac{1}{2} \\ dt = dx \end{cases} \Rightarrow x = t - \frac{1}{2} \Rightarrow x + 1 = t - \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow x + 1 = t + \frac{1}{2}$

Entonces:

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt =$$

$$= \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = I_2 + \frac{1}{2}I_3$$

Debemos resolver $I_2$ e $I_3$.

Resolvemos $I_2$:

$$I_2 = \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{1}{2}L\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2}L\left|x^2+x+1\right|$$

Resolvemos $I_3$:

$$I_3 = \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}t^2+1\right)}dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}dt = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}dt =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,arc\,tg\,\frac{2}{\sqrt{3}}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,arc\,tg\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,arc\,tg\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,arc\,tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \quad \textit{La constante al final}$$

- Podemos escribir $I_1$:

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = I_2 + \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{2}L\left|t^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\,arc\,tg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

En definitiva:

$$\boxed{I = \int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = L|x| - I_1 = L|x| - \frac{1}{2}L\left|x^2x+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\,arc\,tg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C}$$

## Ejercicio 145.-

Resolver la integral $I = \int \frac{2x+5}{4x^3-8x^2+4x-8}dx$

**Solución:**

U Se trata de la integral de una función racional. Analizamos:

$$\left.\begin{array}{l} numerador\ p(x) = 2x+5 \rightarrow grado = m = 1 \\ denominador\ q(x) = 4x^3-8x^2+4x-8 \rightarrow grado = n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \ caso\, I$$

Estudiemos las raíces del denominador:

$$q(x) = 4x^3-8x^2+4x-8 = 4\left(x^3-2x^2+x-2\right) = 4\,s(x)$$

$$Divisores\,de\,2 = \{1, -1, 2, -2\}$$

$$Para\ x = 1 \Rightarrow s(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 - 2 = -2 \neq 0$$

$$Para\ x = -1 \Rightarrow s(-1) = (-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 - 1 - 2 = -6 \neq 0$$

$$Para\ x = 2 \Rightarrow s(2) = 2^3 - 2\cdot 2^2 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow x = 2\ es\ raiz\ de\ s(x) = x^3-2x^2+x-2 \quad (y\ de\ q(x))$$

U Sabemos que la división ($x^3$&$2x^2 + x$ & 2) : ($x$&2) es exacta. La efectuamos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | &2 | 1 | &2 |
| 2 | | 2 | 0 | 2 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |

Cociente $c(x) = x^2 + 1$
Resto = r = 0
$x^3$&$2x^2 + x$ & 2 = ($x$&2) ($x^2$ + 1)

Por tanto, el denominador queda: $q(x) = 4x^3$ & $8x^2 + 4x$ & 8 = 4($x$&2) ($x^2$ + 1)

U Ahora intentemos hallar las raíces de $c(x) = x^2 + 1$. Para ello resolvemos la ecuación de segundo grado $x^2 + 1 = 0$

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \quad \Rightarrow x=\begin{cases} +\sqrt{-1}=i & \textit{raiz imaginaria} \\ -\sqrt{-1}=-i & \textit{raiz imaginaria} \end{cases}$$

Por tanto:

T $x^2+1=(x-i)\,(x+i)$

T $q(x)=4x^3-8x^2+4x-8=4(x-2)\,(x-i)\,(x+i)$

T El denominador tiene tres raíces: $x_1=2$ (real) ; $z_1=i$ y $z_2=-i$ (imaginarias)

Estamos en el **caso Ic**

U La función $f(x)$ puede descomponerse en la siguiente suma:

$$f(x)=\frac{2x+5}{4x^3-8x^2+4x-8}=\frac{2x+5}{(x-2)\,(4x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+N}{4x^2+4} \leftarrow \textit{Buscamos } A, M \textit{ y } N$$

$$\textit{Operando}: \frac{A}{x-2}+\frac{Mx+N}{4x^2+4}=\frac{A(4x^2+4)+(Mx+N)(x-2)}{(x-2)\,(4x^2+4)}=\frac{2x+5}{(x-2)\,(4x^2+4)}$$

$$\textit{De lo anterior se deduce}: A\left(4x^2+4\right)+(Mx+N)(x-2)=2x+5$$

$$\begin{cases} \textit{Para } x=2 \Rightarrow 20A=9 \Rightarrow A=\frac{9}{20} \\ \textit{Para } x=0 \Rightarrow 4A-2N=5 \Rightarrow \frac{9}{5}-2N=5 \Rightarrow -2N=\frac{16}{5} \Rightarrow N=-\frac{8}{5} \\ \textit{Para } x=1 \Rightarrow 8A-M-N=7 \Rightarrow \frac{18}{5}-M+\frac{8}{5}=7 \Rightarrow -M=\frac{9}{5} \Rightarrow M=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\textit{Por tanto}: f(x)=\frac{2x+5}{4x^3-8x^2+4x-8}=\frac{\frac{9}{20}}{x-2}+\frac{-\frac{9}{5}x-\frac{8}{5}}{4x^2+4}=\frac{\frac{9}{20}}{x-2}-\frac{\frac{9}{5}x+\frac{8}{5}}{4x^2+4}$$

U La integral quedaría:

$$I=\int f(x)\,dx=\int\frac{2x+5}{4x^3-8x^2+4x-8}\,dx=\int\frac{\frac{9}{20}}{x-2}\,dx-\int\frac{\frac{9}{5}x+\frac{8}{5}}{4x^2+4}\,dx=\frac{9}{20}\int\frac{1}{x-2}\,dx-\frac{1}{4}\int\frac{\frac{9}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+1}\,dx=$$

$$=\frac{9}{20}L\left|x-2\right|-\frac{1}{4}I_1 \quad (*) \leftarrow \textit{Debemos hallar } I_1$$

$$I_1=\int\frac{\frac{9}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+1}\,dx=\int\frac{\frac{9}{5}x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{\frac{8}{5}}{x^2+1}\,dx=\frac{9}{5}\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\frac{8}{5}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{9}{5}I_2+\frac{8}{5}I_3 \quad (**)$$

*Debemos hallar* $I_2$ *e* $I_3$:

$$I_2=\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}L\left|x^2+1\right|+C_2 \leftarrow \textit{es casi inmediata}$$

$$I_3=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\operatorname{arc\,tg} x+C_3 \leftarrow \textit{es inmediata}$$

$$\textit{Entonces}: I_1=\frac{9}{5}I_2+\frac{8}{5}I_3=\frac{9}{10}L\left|x^2+1\right|+\frac{8}{5}\operatorname{arc\,tg} x+C_1$$

$$\textit{Finalmente}: I=\frac{9}{20}L\left|x-2\right|-\frac{1}{4}I_1=\frac{9}{20}L\left|x-2\right|-\frac{9}{40}L\left|x^2+1\right|-\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg} x+C$$

$$\boxed{I=\int\frac{2x+5}{4x^3-8x^2+4x-8}\,dx=\frac{9}{20}L\left|x-2\right|-\frac{9}{40}L\left|x^2+1\right|-\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg} x+C}$$

**NOTA:** *No insistimos más en este tipo de integrales ya que por su complejidad no suele exigirse en los niveles de bachillerato.*

# 10.2.Caso II.-

Sea la función $f(x) = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$ cuya integral buscamos, es decir, pretendemos hallar el conjunto de sus primitivas.

$$Buscamos\ \ I = \int f(x)\,dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \quad Siendo \left\{ \begin{array}{l} m = grado\ \ p(x) \\ n = grado\ \ q(x) \end{array} \right. \quad tal\ que\ \ m \geq n$$

Veamos como se resuelve este caso:

” Se efectúa la división $p(x) : q(x)$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \hline r(x) & c(x) \end{array}$$

| | | |
|---|---|---|
| Dividendo = $p(x)$ | ; | divisor = $q(x)$ |
| cociente = $c(x)$ | ; | resto = $r(x)$ |
| Recuerda : grado $r(x)$ < grado $q(x)$ | | |
| Recuerda : $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$ | | |

” La integral podemos descomponerla:

$$I = \int f(x)\,dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{q(x)\cdot c(x) + r(x)}{q(x)}\,dx = \int \left[ \frac{q(x)\cdot c(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} \right] dx =$$

$$= \int \left[ c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right] dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = I_1 + I_2$$

” $I_1 = \int c(x)\,dx$ es la integral de una función polinómica $c(x)$, fácil de resolver.

” $I_2 = \int \dfrac{r(x)}{q(x)}\,dx$ es la integral de una función racional tal que:

$$\left. \begin{array}{l} numerador\ \ r(x) \\ denominador\ \ q(x) \end{array} \right\} \ siendo\ \ \ grado\, r(x) < grado\, q(x)$$

Estamos en el **caso I**, tratado anteriormente.

## Ejemplo 44.-

Queremos hallar $\int f(x)\,dx = \int \dfrac{3x^3 - x^2 + 11x + 37}{3x+5}\,dx$ . Veamos:

“ Debemos resolver la integral de una función racional tal que:

$$\left. \begin{array}{l} numerador\ \ p(x) = 3x^3 - x^2 + 11x + 37 \\ denomindor\ \ q(x) = 3x + 5 \end{array} \right\} \ siendo\ \ \ 3 = \ grado\, p(x) \geq 1 = grado\, q(x)$$

Estamos en el **caso II**.

“ Efectuamos la división $(\ 3x^3 - x^2 + 11x + 37\ ) : (\ 3x + 5\ )$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - x^2 + 11x + 37 & 3x + 5 \\ \cline{2-2} -3x^3 - 5x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 - 2x + 7 \\ -6x^2 + 11x + 37 & \\ 6x^2 + 10x \qquad & \\ 21x + 37 & \\ -21x - 35 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Dividendo = $p(x)$ =
= $3x^3 - x^2 + 11x + 37$

Divisor= $q(x) = 3x$
$+ 5$

Cociente = $c(x)$ =
= $x^2 - 2x + 7$

Resto = $r(x) = 2$

“ Descomponiendo el numerador del la función integrando y al operar:

$$I = \int f(x)\,dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{3x^3 - x^2 + 11x + 37}{3x+5}\,dx = \int \frac{(3x+5)\cdot\left(x^2 - 2x + 7\right) + 2}{3x+5}\,dx =$$

$$= \int \left[ \frac{(3x+5)\cdot\left(x^2 - 2x + 7\right)}{3x+5} + \frac{2}{3x+5} \right] dx = \int \left[ x^2 - 2x + 7 + \frac{2}{3x+5} \right] dx \; =$$

$$= \int \left(x^2 - 2x + 7\right) dx + \int \frac{2}{3x+5}\,dx = I_1 + I_2 \qquad (*)$$

“ Resolvamos $I_1$:

$$I_1 = \int \left(x^2 - 2x + 7\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x \; + \; C_1$$

“ Resolvamos $I_2$:

$$I_2 = \int \frac{2}{3x+5}\,dx = 2\int \frac{1}{3x+5}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{3x+5}\,dx = \frac{2}{3}\,L\left|\,3x+5\,\right| \; + \; C_2$$

Volviendo a la referencia (*) :

$$\boxed{I = \int \frac{3x^3 - x^2 + 11x + 37}{3x+5}\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x + \frac{2}{3}\,L\left|\,3x+5\,\right| \; + \; C}$$

## Ejercicio 146.-

Hallar la integral $I = \int \dfrac{x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 2}{x^2 + x - 2}\,dx$

**Solución:**

e En este caso

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \; siendo \left\{ \begin{array}{ll} p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 2 & grado \;\; p(x) = 5 \\ q(x) = x^2 + x - 2 & grado \;\; q(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \;\; Caso\, II.$$

e Efectuemos la división $p(x) : q(x)$

$$\begin{array}{rl|l} x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 2 & & x^2 + x - 2 \\ \cline{3-3} -x^5 - x^4 + 2x^3 & & x^3 + 5 \\ 5x^2 + 7x - 2 & & \\ -5x^2 - 5x + 10 & & \\ \hline 2x + 8 & & \end{array}$$

| |
|---|
| Dividendo = $p(x)$ = $x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 2$<br>Divisor= $q(x) = x^2 + x - 2$<br>Cociente = $c(x) = x^3 + 5$<br>Resto = $r(x) = 2x + 8$ |

e De lo anterior deducimos que:

$$x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 2 = (\; x^2 + x - 2)\cdot(x^3 + 5) + 2x + 8$$

e La función integrando queda:

$$f(x) = \frac{x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{\left(x^2 + x - 2\right)\cdot\left(x^3 + 5\right) + 2x + 8}{x^2 + x - 2} =$$

$$= \frac{\left(x^2 + x - 2\right)\cdot\left(x^3 + 5\right)}{x^2 + x - 2} + \frac{2x+8}{x^2 + x - 2} = x^3 + 5 + \frac{2x+8}{x^2 + x - 2}$$

e La integral queda:

$$I = \int f(x)\,dx = \int \left(x^3 + 5\right) dx + \int \frac{2x+8}{x^2 + x - 2}\,dx = I_1 + I_2 \qquad (*)$$

e Resolvemos $I_1$ :

$$I_1 = \int \left(x^3 + 5\right) dx = \int x^3 dx + \int 5\,dx = \frac{x^4}{4} + 5x + C_1$$

e Resolvemos $I_2$ :

$$I_2 = \int \frac{2x+8}{x^2+x-2}\,dx \;\leftarrow\; \textit{Integral de una función racional}$$

$$Llamamos\ g(x) = \frac{2x+8}{x^2+x-2} \begin{cases} s(x) = 2x+8 \;\leftarrow\; grado = 1 \\ t(x) = x^2 + x - 2 \leftarrow\; grado = 2 \end{cases} \Rightarrow\; Caso\, I$$

Hallemos las raíces del polinomio denominador $t(x) = x^2 + x$ &2

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

El denominador $t(x) = x^2 + x$ &2 tiene dos raíces reales distintas ($x_1$=1 y $x_2$=&2)
Por tanto: $t(x) = x^2 + x$ &2 = ($x$&1)·($x$ + 2)
Descomponemos la función integrando de $I_2$ :

$$g(x) = \frac{s(x)}{t(x)} = \frac{2x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)}{x-1} + \frac{B(x-1)}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$Deducimos\ que\ \ A(x+2) + B(x-1) = 2x + 8 \;\leftarrow\; Buscamos\ A\ y\ B$$

$$\left.\begin{array}{l} Para\ \ x = 1 \Rightarrow 3A = 10 \Rightarrow A = \dfrac{10}{3} \\ Para\ \ x = -2 \Rightarrow -3B = 4 \Rightarrow B = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) = \frac{\frac{10}{3}}{x-1} - \frac{\frac{4}{3}}{x+2}$$

Substituyendo en la integral:

$$I_2 = \int g(x)dx = \int \frac{2x+8}{x^2+x-2}dx = \int \left[\frac{10}{3(x-1)} - \frac{4}{3(x+2)}\right] dx = \int \frac{10}{3(x-1)}dx - \int \frac{4}{3(x+2)}dx =$$

$$= \frac{10}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{4}{3}\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{10}{3} L\left|x-1\right| - \frac{4}{3} L\left|x+2\right| + C_2$$

e Volviendo a la referencia (*) y substituyendo:

$$\boxed{I = \int \frac{x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 2}{x^2 + x - 2} dx = \frac{x^4}{4} + 5x + \frac{10}{3} L\left|x-1\right| - \frac{4}{3} L\left|x+2\right| + C}$$

## Ejercicio 147.-

Hallar el conjunto de las funciones primitivas de $f(x) = \dfrac{2x^5 + x^4 + 3x^2 + x - 4}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}$

**Solución:**

[ Se trata de resolver la integral $\int f(x)\,dx = \int \dfrac{2x^5 + x^4 + 3x^2 + x - 4}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5} dx$ , es decir, la integral de una función racional.

[ Analicemos el caso:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\ siendo \left\{\begin{array}{ll} p(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^2 + x - 4 & grado\ \ p(x) = 5 \\ q(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 & grado\ \ q(x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow\ Caso\, II.$$

[ Efectuemos la división $p(x)$ **:** $q(x)$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & +\ x^4 & +\ 0x^3 & +\ 3x^2 & +\ x & -\ 4 & x^3+3x^2-9x+5 \\ \cline{7-7}
-2x^5 & -\ 6x^4 & +18x^3 & -10x^2 & & & 2x^2-5x+33 \\
 & -5x^4 & +18x^3 & -\ 7x^2 & +\ x & & \\
 & 5x^4 & +15x^3 & -45x^2 & +25x & & \\
 & & 33x^3 & -52x^2 & +\ 26x & -\ 4 & \\
 & & -33x^3 & -99x^2 & +297x & -165 & \\
 & & & -151x^2 & +323x & -169 & \\ \hline
\end{array}
$$

- Podemos expresar:
  $2x^5 + x^4 + 3x^2 + x - 4 = (x^3 + 3x^2 - 9x + 5)\cdot(2x^2 - 5x + 33) - 151x^2 + 323x - 169$
- La función integrando la podemos descomponer en una suma:

$$f(x) = \frac{2x^5+x^4+3x^2+x-4}{x^3+3x^2-9x+5} = \frac{\left(x^3+3x^2-9x+5\right)\cdot\left(2x^2-5x+33\right)-151x^2+323x-169}{x^3+3x^2-9x+5} =$$

$$= \frac{\left(x^3+3x^2-9x+5\right)\cdot\left(2x^2-5x+33\right)}{x^3+3x^2-9x+5} + \frac{-151x^2+323x-169}{x^3+3x^2-9x+5} =$$

$$= 2x^2 - 5x + 33 + \frac{-151x^2+323x-169}{x^3+3x^2-9x+5}$$

- La integral queda:

$$I = \int f(x)\,dx = \int \frac{2x^5+x^4+3x^2+x-4}{x^3+3x^2-9x+5}\,dx = \int \left(2x^2 - 5x + 33 + \frac{-151x^2+323x-169}{x^3+3x^2-9x+5}\right)dx =$$

$$= \int \left(2x^2 - 5x + 33\right)dx + \int \frac{-151x^2+323x-169}{x^3+3x^2-9x+5}\,dx = I_1 + I_2 \quad (*)$$

Debemos resolver las integrales $I_1$ e $I_2$:

- Resolvamos $I_1$ :

$$I_1 = \int \left(2x^2 - 5x + 33\right)dx = \int 2x^2\,dx - \int 5x\,dx + \int 33\,dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 33x + C_1$$

- Resolvamos $I_2$ (integral de una función racional):

$$I_2 = \int \frac{-151x^2+323x-169}{x^3+3x^2-9x+5}\,dx = \int \frac{s(x)}{t(x)}\,dx \;\leftarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \textit{grado numerador} = 2 \\ \textit{grado denominador} = 3 \end{array} \right. \rightarrow \textit{Caso I}$$

Hallemos las raíces del denominador. Para ello nos fijamos en sus posibles raíces enteras, las cuales estarán entre los divisores del término independiente:

Divisores de 5 = { 1, $-1$, 5, $-5$ }

Probamos con $x = 1 \Rightarrow t(1) = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 9\cdot 1 + 5 = 1 + 3 - 9 + 5 = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$ ✓

Ya tenemos una raíz entera de $t(x)$

La división $(x^3 + 3x^2 - 9x + 5) : (x - 1)$ es exacta. La efectuamos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | $-9$ | 5 |
| 1 | | 1 | 4 | $-5$ |
| | 1 | 4 | $-5$ | 0 |

De la división deducimos:
$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x - 1)\cdot(x^2 + 4x - 5)$
Intentemos factorizar $x^2 + 4x - 5$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-4+6}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-4-6}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \end{array} \right.$$

Podemos expresar $x^2 + 4x - 5 = (x - 1) \cdot (x + 5)$

En definitiva: $t(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 5)$

Por tanto:

$$t(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \ \ tiene \begin{cases} x = 1 & raiz\ doble \\ x = -5 & raiz\ simple \end{cases} \Rightarrow \ \ Caso\ I.b$$

Expresamos la función integrando descompuesta en una suma:

$$\frac{-151x^2 + 323x - 169}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5} = \frac{-151x^2 + 323x - 169}{(x-1)^2\,(x+5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A_1(x-1)(x+5) + A_2\,(x+5) + B\,(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+5)}$$

*Deducimos que*: $A_1(x-1)(x+5) + A_2\,(x+5) + B\,(x-1)^2 = -151x^2 + 323x - 169 \ \leftarrow \ ¿A_1, A_2, B?$

$$\left.\begin{array}{l} Para\ \ x = 1 \Rightarrow \ 6A_2 = 3 \Rightarrow \ A_2 = \frac{1}{2} \\ Para\ \ x = -5 \Rightarrow \ 36B = -5559 \Rightarrow \ B = -\frac{5559}{36} = -\frac{1853}{12} \\ Para\ \ x = 0 \Rightarrow \ -5A_1 + 5A_2 + B = -169 \Rightarrow -5A_1 + \frac{5}{2} - \frac{1853}{12} = -169 \Rightarrow \ -5A_1 = -\frac{205}{12} \Rightarrow \ A_1 = \frac{41}{12} \end{array}\right\}$$

$$Por\ \ tanto: \ \frac{-151x^2 + 323x - 169}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5} = \frac{-151x^2 + 323x - 169}{(x-1)^2\,(x+5)} = \frac{\frac{41}{12}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1853}{12}}{x+5} = \frac{41}{12(x-1)} + \frac{1}{2\,(x-1)^2} - \frac{1853}{12\,(x+5)}$$

La integral $I_2$ quedará:

$$I_2 = \int \frac{-151x^2 + 323x - 169}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}\,dx = \int \left[ \frac{41}{12\,(x-1)} + \frac{1}{2\,(x-1)^2} - \frac{1853}{12\,(x+5)} \right] dx = \int \frac{41}{12\,(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{2\,(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1853}{12\,(x+5)}\,dx =$$

$$= \frac{41}{12} \int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1853}{12} \int \frac{1}{x+5}\,dx = \frac{41}{12} L \left| x - 1 \right| + \frac{1}{2} I_3 - \frac{1853}{12} L \left| x + 5 \right| \ + \ C_2 \quad (**)$$

[ Resolvamos $I_3 = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

Por cambio de variable:

$$\begin{cases} t = x - 1 \\ dt = dx \end{cases} \Rightarrow \ I_3 = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C_3 = \frac{t^{-1}}{-1} + C_3 = -\frac{1}{t} + C_3 = -\frac{1}{x-1} + C_3$$

[ Substituyendo en la referencia (**) :

$$I_2 = \frac{41}{12} L \left| x - 1 \right| - \frac{1}{2\,(x-1)} - \frac{1853}{12} L \left| x + 5 \right| \ + \ C$$

[ Substituyendo en la referencia (*) $I = I_1 + I_2$

$$\boxed{\begin{aligned} I = \int f(x)\,dx = \int \frac{2x^5 + x^4 + 3x^2 + x - 4}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}\,dx = \\ = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 33x + \frac{41}{12} L \left| x - 1 \right| - \frac{1}{2\,(x-1)} - \frac{1853}{12} L \left| x + 5 \right| \ + \ C \end{aligned}}$$

[ El conjunto de las primitivas pedido es:

$$\boxed{F(x) = \ = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 33x + \frac{41}{12} L \left| x - 1 \right| - \frac{1}{2\,(x-1)} - \frac{1853}{12} L \left| x + 5 \right| \ + \ C}$$