MODELO EXAMEN ANÁLISIS

3.

Problema 21.1.2 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x \le 1, \ x \ne -1 \\[2ex] \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de f en $x = 1$.

b) (1 punto) Halle las asíntotas de f, si existen.

c) (1 punto) Determine el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Escriba la ecuación de dicha recta tangente.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{2}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{1/x}{1} = 1$ y $f(1) = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Asíntotas:

En la rama $x \le 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

- Verticales:
  En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

En la rama $x > 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

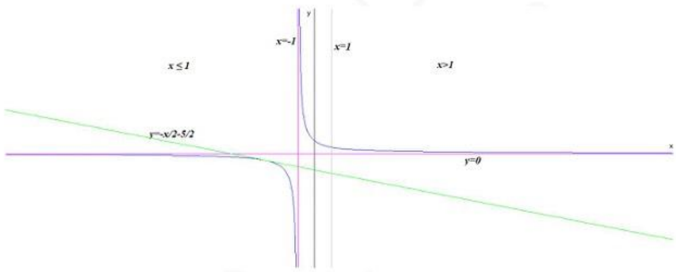
- Verticales: No hay, ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

) $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \le 1, \ x \ne -1 \\[2ex] -\dfrac{x\ln x - x + 1}{x(x-1)^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Como $x_0 < 1 \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2} \Longrightarrow f'(x_0) = -\dfrac{2}{(x_0+1)^2} = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow$
$x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \Longrightarrow x_0 = -3$ y $x_0 = 1$, esta última no es válida ya que $x_0 < 1$.
En $x_0 = -3 \Longrightarrow f(-3) = \frac{2}{-3+1} = -1 \Longrightarrow (-3, -1)$ es el punto de tangencia.
ecuación de la recta tangente es

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x+3) \Longrightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$$



4.

Problema 16.8.2 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Problema 16.8.2 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad: Las ramas son continuas para cualquier valor, estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{5+x} = \frac{1}{5} \\ f(0) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Luego la función es continua en R.
Asíntotas verticales no tiene y las horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{5-x} = 0; \text{ y } \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{5+x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Oblicuas no hay al tener horizontales.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(5-x)^2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{-1}{(5+x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(0^-) = \frac{1}{25} \ne f'(0^+) = -\frac{1}{25}$$

luego la función es derivable en $R - \{0\}$.

c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{5-x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{5+x}\,dx =$$

$$-\ln|5-x|\Big]_{-1}^{0} + \ln|5+x|\Big]_{0}^{1} = 2\ln\left(\frac{6}{5}\right) = 0,365$$