TEORÍA Y EJERCICIOS DE DERIVADAS

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I

I.E.S. Sierra de Guadarrama

Definición de derivada: La derivada de la función f en el punto x=a, llamada f prima de a se denota por f'(a), si existe, es el valor del limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si f'(a) es un número real, la función f es derivable en x=a. Si f'(a) no es un número real o el límite no existe, la función f no es derivable en dicho punto.

Ejemplo: Calcular la derivada de $f(x)=x^2$ en x=2:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 4) = 4$$

Tasa de variación media: Supongamos que un coche de formula uno se mueve en una carretera totalmente recta. A distintas distancias de la salida se registran los tiempos de paso, obteniéndose la siguiente tabla:

POSICIÓN	0	1.1	4.5	5.1	6.2	6.7
TIEMPO	0	2.2	9	11	12.4	13.4

En este caso, la posición y, se puede ver como una función f, que depende del tiempo x; es decir y=f(x).

La tasa de variación media de la posición en el intervalo de tiempo desde el instante 9 al instante 13.4 es:

$$\frac{f(13.4) - f(9)}{13.4 - 9} = \frac{6.7 - 4.5}{13.4 - 9} = 0.5$$

En general, la **tasa de variación media** de la función f en el intervalo [a;b] se define como el cociente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

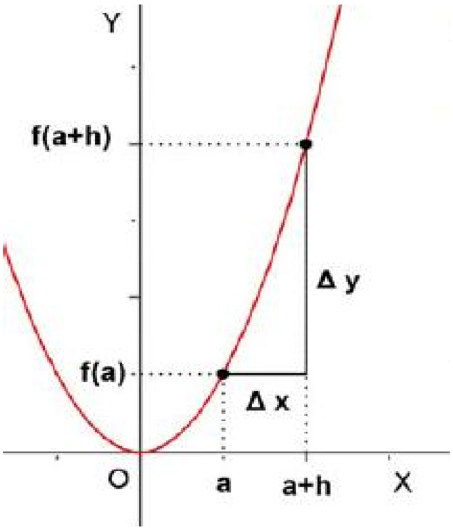
Esta tasa puede ser positiva (creciente), negativa (decreciente) o nula (constante).

La **tasa de variación instantánea** de la función f en el punto x=a se obtiene, haciendo tender el punto b al punto a, en la tasa de variación media de la función f en el intervalo [a;b]; por tanto, la tasa de variación instantánea de la función f en el punto x=a es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que es precisamente la derivada de la función f en el punto x=a. (en este límite consideramos b=a+h)

Utilizamos la derivada como la variación de una función en un punto concreto, o en un instante de tiempo, por eso se considera h como un incremento muy pequeño. Ejemplos de uso en el cálculo de la velocidad y de la aceleración instantáneas.



Función f(a). Derivada de la función f´(a).

TVM : tasa de variación media

Intervalo [a, a+h]

$$\boxed{TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

TVI : tasa de variación instantánea

Punto de abscisa x = a

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Ejemplos de derivadas aplicando la definición

Hallar la tasa de variación media de la función $f(x)=x^2+1$ en el intervalo [0;3] y la tasa de variación instantánea en el punto x=2.

Intervalo [a;a+h] luego $f(a+h)=f(3)=3^2+1=10$ y $f(a)=f(0)=0^2+1=1$

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{10-1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Calculamos f(x+h) sumando h a las x y respetando el exponente de la variable.
$f(x+h)=(x+h)^2+1=x^2+2xh+h^2+1$, como nos piden en el punto x=2, podemos sustituir directamente

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \Rightarrow$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h+5-5}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+4)}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

Función derivada y derivadas sucesivas

La función derivada de f es la que a cada elemento x le hace corresponder la derivada de la función f en dicho punto. Esta función se designa por f'(x).

Aplicando la fórmula de la derivada podemos calcular la derivada de cualquier función. Por comodidad utilizamos la siguiente tabla resumen de las derivadas de las funciones más usuales, que nos permite hacer lo mismo sin necesidad de recurrir a la definición en cada caso.

TABLA DE DERIVADAS				
Tipo	**Función simple**		**Función compuesta**	
Constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0,\ k \in \mathbb{R}$		
Identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
Potencial	$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$	$f(x) = f^a$	$f'(x) = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$
Irracional	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[n]{f}$	$f'(x) = \dfrac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$
Exponencial	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^f$	$f'(x) = e^f \cdot f'$
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$f(x) = a^f$	$f'(x) = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
Potencial exponencial	La derivamos como tipo potencial y le sumamos la derivada como exponencial. *** **Se suele hacer tomando logaritmos no se aplica esta fórmula.**		**Es una función f elevada a otra función g** $D\left[f^g\right] = \overbrace{g \cdot f^{g-1} \cdot f'}^{\text{Potencial}} + \overbrace{f^g \cdot g' \cdot \ln f}^{\text{Exponencial}}$ D quiere decir derivada	
Logarítmica	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \ln f$	$f'(x) = \dfrac{f'}{f}$
	$f(x) = \lg_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$f(x) = \lg_a f$	$f'(x) = \dfrac{f'}{f \cdot \ln a}$
		Trigonométricas		
Seno	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \operatorname{sen} f$	$f'(x) = \cos f \cdot f'$
Coseno	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$f(x) = \cos f$	$f'(x) = -\operatorname{sen} f \cdot f'$
Tangente	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$f(x) = \operatorname{tg} f$	$f'(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 f\right) \cdot f' = \dfrac{f'}{\cos^2 f}$
Arco seno	$f(x) = \operatorname{arc\ sen} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \operatorname{arc\ sen} f$	$f'(x) = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arco coseno	$f(x) = \operatorname{arc\ cos} x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \operatorname{arc\ cos} f$	$f'(x) = \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arco tangente	$f(x) = \operatorname{arc\ tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \operatorname{arc\ tg} f$	$f'(x) = \dfrac{f'}{1+f^2}$

REGLAS DE DERIVACIÓN		
Suma	$(f+g)' = f' + g'$	La derivada de una suma de dos funciones es la suma de las derivadas de estas funciones.
Resta	$(f-g)' = f' - g'$	La derivada de una diferencia de dos funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones.
Producto	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda.
Cociente	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada de numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador y, todo ello, dividido por el denominador sin derivar al cuadrado.
Producto por un número	$(a \cdot f)' = a \cdot f'$	La derivada del producto de un número real por una función es igual al número real por la derivada de la función.
Composición	$\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	Regla de la cadena

Ejemplos básicos de aplicación de la tabla:

Función constante: f(x)=k siendo k un número real, f'(x)=0

$$\Rightarrow f(x) = 5 \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -24 \quad f'(x) = 0$$

Función Identidad: f(x)=x; f'(x)=1

Producto por una constante: (a f(x))'= a f'(x)

$$\Rightarrow f(x) = 8\,x \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ f = x \to f' = 1 \end{cases} \quad f'(x) = 8 \cdot 1 = 8$$

Potencial simple: $f(x)=x^a$; $f'(x) = a\,x^{a-1}$

$$\textbf{a) } f(x) = x^3 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \quad f'(x) = \overbrace{3}^{a} \cdot x^{\overbrace{2}^{a-1}} \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

b) $f(x) = 2\,x^4$

Aplicamos la Regla de la Cadena, desde la estructura más exterior a la más interior, obteniendo $f'(x)=8x^3$

c) $f(x) = 2\,x^4 - x^3 + 8x + 5$

Como son sumas y restas de funciones, derivamos cada uno de los sumandos

$$\begin{array}{lll} f(x) = 2x^4 \Rightarrow f'(x) = 8\,x^3 & f(x) = 8\,x \Rightarrow f'(x) = 8 & \\ f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 & f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0 & \end{array} \Rightarrow f'(x) = 8\,x^3 - 3x^2 + 8$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

Preparamos la función expresándola en forma de potencia

$$f(x) = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = \overbrace{-4}^{a} \cdot x^{\overbrace{-4-1}^{a-1}} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{x^5}$$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Como las raíces son potencias, podemos derivarla aplicando la fórmula de la derivada de una raíz o pasarlas a potencia y derivarlas como una potencia.

Como raíz

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} \qquad f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^{3-1}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Como potencia

$$f(x) = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \overbrace{1/3}^{a} \cdot x^{\overbrace{1/3-1}^{a-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Derivadas de Funciones Compuestas

$$\textbf{Tipo potencial} \Rightarrow \boxed{f(x) = f^a \quad f'(x) = a \cdot f^{a-1} \cdot f'}$$

$$\textbf{a) } f(x) = \left(x^2 + 1\right)^3 \Rightarrow \qquad \textbf{Solución: } f'(x) = 6x \cdot \left(x^2 + 1\right)^2$$

$$f(x) = \underbrace{\left(x^2 + 1\right)}_{f}^{\overbrace{3}^{a}} \Rightarrow f'(x) = \overbrace{3}^{a} \cdot \left(\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{f}\right)^{\overbrace{2}^{a-1}} \cdot f'?$$

$$\text{Calculamos } f'? \to f(x) = \underbrace{\left(x^2 + 1\right)}_{f} \to f'(x) = 2x$$

$$\textbf{b) } f(x) = \frac{1}{\left(x^2 + x + 1\right)^5} \qquad f'(x) = \frac{-5(2x+1)}{\left(x^2 + x + 1\right)^6}$$

Transformamos la función en

$$f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{-5} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f=\left(x^2+x+1\right) \to f'=2x+1 \\ a=-5 \end{array} \right. \Rightarrow f'(x)=-5\left(x^2+x+1\right)^{-6}.(2x+1) \Rightarrow f'(x)=\frac{-5(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^6}$$

Tipo Irracional

$$f(x)=\sqrt[n]{f} \qquad f'(x)=\frac{f'}{n\cdot\sqrt[n]{f^{n-1}}}$$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ **Solución :** $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow \begin{cases} f=x^2 \to f'=2x \\ n=3 \to n-1=2 \end{cases} f'(x)=\frac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{3\cdot x\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Tipo Exponencial

Base nº e $\Rightarrow$ $\boxed{f(x)=e^f \Rightarrow f'(x)=e^f\cdot f'}$

$f(x)=e^{x^2+5}$

$$f(x)=e^{x^2+5} \Rightarrow f=x^2+5 \to f'=2x \Rightarrow f'(x)=e^{\overbrace{x^2+5}^{f}}\cdot\underbrace{2x}_{f'} \Rightarrow f'(x)=e^{x^2+5}\cdot 2x$$

Base nº a $\Rightarrow$ $\boxed{\text{simple } f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x\cdot \ln a \quad \text{compuesta } f(x)=a^f \Rightarrow f'(x)=a^f\cdot f'\cdot \ln a}$

a) $f(x)=3^x$ $\qquad f(x)=3^x \Rightarrow f'(x)=3^x\cdot\ln 3$

b) $f(x)=5^{\left(x^3+x\right)}$

$$f(x)=5^{\left(x^3+x\right)} \Rightarrow \begin{cases} f=x^3+x \to f'=3x^2+1 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=5^{\left(x^3+x\right)}\cdot\left(3x^2+1\right)\cdot\ln 5$$

Tipo Logarítmico

Neperianos $\Rightarrow$ $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \quad$ compuesta $f(x)=\ln f \Rightarrow f'(x)=\dfrac{f'}{f}$

$$f(x)=\ln\left(x^2+7\right) \Rightarrow f=x^2+7 \to f'=2x \Rightarrow f'(x)=\frac{\overbrace{2x}^{f'}}{\underbrace{x^2+7}_{f}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2+7}$$

Cualquier base:

$$f(x)=\lg_a x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln a} \qquad \text{compuesta} \quad f(x)=\lg_a f \Rightarrow f'(x)=\frac{f'}{f\cdot\ln a}$$

a) $f(x)=\lg_2 x$ $\qquad f(x)=\lg_2 x \Rightarrow a=2 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln 2}$

b) $f(x)=\lg_2\left(x^3+2x\right)$

$$f(x) = \lg_2\left(x^3+2x\right) \Rightarrow \begin{cases} f = x^3+2x \to f' = 3x^2+2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{3x^2+2}^{f'}}{\underbrace{\left(x^3+2x\right)}_{f}\cdot \ln \underbrace{2}_{a}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2+2}{\left(x^3+2x\right)\cdot \ln 2}$$

Trigonométricas

Seno $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \text{sen } f \Rightarrow f'(x) = \cos f \cdot f'}$

f(x) = sen 5x $\Rightarrow f(x) = \text{sen } 5x \to f = 5x \to f' = 5 \Rightarrow f'(x) = \cos \underbrace{5x}_{f} \cdot \underbrace{5}_{f'} \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \cos 5x$

Coseno $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \cos f \to f'(x) = -\text{ sen } f \cdot f'}$

f(x) = cos3x² $\Rightarrow f(x) = \cos 3x^2 \to f = 3x^2 \to f' = 6x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } \overbrace{3x^2}^{f} \cdot \overbrace{6x}^{f'} \Rightarrow f'(x) = -6x \cdot \text{sen } 3x^2$

Tangente $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \text{tg } f \to f'(x) = \left(1+\text{tg}^2 f\right)\cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f}}$

a) **f(x) = tg 7x** $\Rightarrow f(x) = \text{tg } 7x \to f = 7x \to f' = 7 \Rightarrow f'(x) = \left(1+\text{tg}^2 7x\right)\cdot 7 \Rightarrow f'(x) = 7\cdot\left(1+\text{tg}^2 7x\right)$

b) **f(x) = tg(4x + 5)** $\Rightarrow f(x) = \text{tg}(4x+5) \to f = 4x+5 \to f' = 4$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{\cos^2(4x+5)}$$

Arco seno y arco coseno, sólo se diferencian en el signo de la derivada.

$$f(x) = \text{arc sen } f \to f'(x) = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \qquad f(x) = \text{arccos } f \to f'(x) = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$$

f(x) = arc sen x² $\Rightarrow f(x) = \text{arc sen } x^2 \to f = x^2 \to f' = 2x$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{2x}^{f'}}{\sqrt{1-\left(\underbrace{x^2}_{f}\right)^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Arco Tangente

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \text{arc tg } f \qquad f'(x) = \frac{f'}{1+f^2}}$$

$f(x) = \text{arctg}\left(x^2-1\right) \Rightarrow f(x) = \text{arctg}\left(x^2-1\right) \to f = x^2-1 \to f' = 2x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{2x}^{f'}}{1+\left(\underbrace{x^2-1}_{f}\right)^2} \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{1+\left(x^2-1\right)^2}$$

Producto $\Rightarrow$ $\boxed{(f\cdot g) = f'\cdot g + f\cdot g'}$

a) **f(x) = x⁵ · lnx**

$$f(x) = \overbrace{x^5}^{f}\cdot\underbrace{\ln x}_{g} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} f = x^5 \to f' = 5x^4 \\ g = \ln x \to g' = \frac{1}{x} \end{array}\right. \Rightarrow f'(x) = \overbrace{5x^4}^{f'}\cdot\underbrace{\ln x}_{g} + \overbrace{x^5}^{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \Rightarrow f'(x) = 5x^4\cdot\ln x + x^4$$

b) **f(x) = sen x · eˣ**

$$f(x) = \text{sen } x \cdot e^x \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = \text{sen } x \to f' = \cos x \\ g = e^x \to g' = e^x \end{array} \right. \Rightarrow f'(x) = \cos x \cdot e^x + \text{sen } x \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = e^x(\cos x + \text{sen} x)$$

Cociente $\Rightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$

a) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = 3x^2 - 2x \to f' = 6x - 2 \\ g = x^2 + 2 \to g' = 2x \end{array} \right.$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(6x-2)}^{f'}\overbrace{(x^2+2)}^{g} - \overbrace{(3x^2-2x)}^{f}\overbrace{(2x)}^{g'}}{\underbrace{(x^2+2)}_{g}{}^2} = \frac{6x^3 + 12x - 2x^2 - 4 - (6x^3 - 4x^2)}{(x^2+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 + 12x - 4}{(x^2+2)^2}$$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = \ln x \to f' = 1/x \\ g = x \to g' = 1 \end{array} \right. \Rightarrow f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Composición $\Rightarrow \boxed{[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$

a) $f(x) = \ln(\text{sen} x)$ Logarítmica $f(x) = \ln \overbrace{\text{sen} x}^{f} \to f'(x) = \frac{f'}{f} \to f = \text{sen} x \to f' = \cos x \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{\text{sen} x}$

b) $f(x) = \text{sen}(\ln x)$ Seno $f(x) = \text{sen } \overbrace{\ln x}^{f} \to f'(x) = \cos f \cdot f' \to f = \ln x \to f' = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cos \ln x$

c) $f(x) = \ln(\ln x^2)$ $\qquad$ Solución: $f'(x) = \frac{2}{x \ln x^2}$

Ejemplo: Calculemos la derivada de h(x) = cos (x^2) , donde la función h es la composición de dos funciones:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = \cos(x) \end{cases}$$

Es decir h(x) = g(f(x)). Para derivar h(x) utilizamos la regla de la cadena h'(x)=g'(f(x))f'(x)

Como

$$\begin{cases} f'(x) = 2x \\ g'(x) = -\text{sen}(x) \end{cases}$$

se tiene que h'(x)= -sen (f(x)) 2x = -sen(x^2)2x

Ejercicios resueltos:

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen } x^2$ $\Rightarrow f'(x) = 2x\cos x^2$ (seno)

b) $f(x) = \text{sen}^2 x$ $\Rightarrow f'(x) = 2\text{sen}x \cdot \cos x$ (potencial)

c) $f(x) = (3x^2 - 2)^5$ $\Rightarrow f'(x) = 30x\ (3x^2 - 2)^4$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3}$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$

e) $f(x) = e^{3x+2}$ $\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot e^{3x+2}$

f) $\log_3(4x+1)$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{4}{(4x+1).\ln 3}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ 3 $\Rightarrow f'(x) = \ = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

h) $f(x) = \text{sen}^2(2x^3 + 2x)$ $.f'(x) = 2 \cdot \left[\text{sen}(2x^3+2x)\right] \cdot \cos\ (2x^3+2x) \cdot \left(6x^2+2\right)$

Halla las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{7x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{7}{(7x+1)^2}$

b) $f(x) = x^{2/3} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3}\, x^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

c) $f(x) = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}$ $f(x) = x^{\frac{7}{3}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{7}{3} x^{\frac{7}{3}-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{7}{3} x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$

d) $f(x) = \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \Rightarrow f'(x) = 2\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\left(2x \cdot e^{2x}\right) \cdot x^2 - \left(e^{2x} \cdot 2x\right)}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^{2x} \cdot \left(x^2 - 1\right)}{x^3}$

f) $f(x) = x\cos 2x \Rightarrow f'(x) = 1.\cos 2x + x(-\text{sen}2x)2 \Rightarrow f'(x) = \cos 2x - 2\text{sen}2x$

g) $f(x) = \ln\cos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-\text{sen } x}{\cos x}$ $f'(x) = -\text{tg } x$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $\Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$