

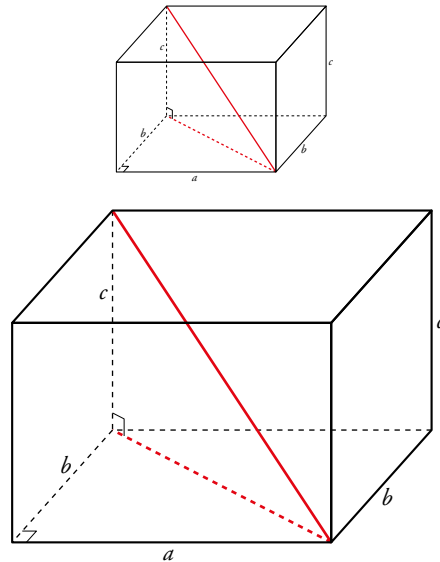
# 5 VECTORES EN EL ESPACIO

Página 131

## Resuelve

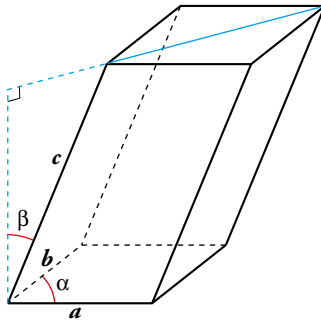
### Diagonal de un ortoedro y volumen de un paralelepípedo

1 Expresa la diagonal de un ortoedro en función de sus dimensiones,  $a$ ,  $b$  y  $c$ .



$$\text{Diagonal} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

2 Calcula el volumen de este paralelepípedo en función de  $a$ ,  $b$  y  $c$  y de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .



$$\text{Volumen} = a b c \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

# 1 OPERACIONES CON VECTORES

Página 133

**1** La propiedad  $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (ab) \cdot \vec{v}$  relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.

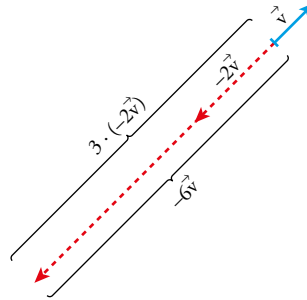
- a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?  
 b) Interpreta dicha propiedad para  $a = 3$ ,  $b = -2$  y  $\vec{v}$  un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Producto de números por vectores:

$$b \cdot \vec{v}; (a \cdot b) \cdot \vec{v}; a \cdot (b \cdot \vec{v})$$

Producto entre números:  $a \cdot b$

$$b) \left. \begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array} \right\} 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$$



**2** La propiedad distributiva  $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$  relaciona la suma de números con la suma de vectores.

- a) De las dos sumas que aparecen, determina cuál es de cada tipo.  
 b) Interpreta dicha propiedad para  $a = 3$ ,  $b = 5$  y  $\vec{v}$  un vector cualquiera representado sobre el papel.

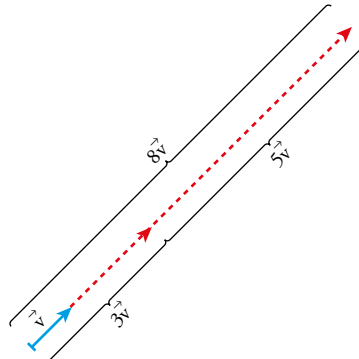
a) Suma de números:

$$a + b$$

Suma de vectores:

$$a\vec{v} + b\vec{v}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array} \right\} 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$$



## 2 ► EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UN VECTOR. COORDENADAS

Página 135

1 Si  $\vec{u}(-3, 5, 1)$ ,  $\vec{v}(7, 4, -2)$ , halla las coordenadas de:

a)  $2\vec{u}$       b)  $0\vec{v}$       c)  $-\vec{u}$       d)  $2\vec{u} + \vec{v}$       e)  $\vec{u} - \vec{v}$       f)  $5\vec{u} - 3\vec{v}$

a)  $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b)  $0\vec{v} = (0, 0, 0)$

c)  $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d)  $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e)  $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f)  $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) - 3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

2 Sean los vectores:

$$\vec{x}(1, -5, 2), \vec{y}(3, 4, -1), \vec{z}(6, 3, -5), \vec{w}(24, -26, -6)$$

Halla  $a, b, c$  para que se cumpla  $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$ .

$$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$$

$$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 3b + 6c = 24 \\ -5a + 4b + 3c = -26 \\ 2a - b - 5c = -6 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6;$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución:  $a = 6$ ,  $b = 2$ ,  $c = 4$ , es decir,  $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$ .

## 3 ▶ PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

### Página 137

**1** Respecto de una base ortonormal, las coordenadas de tres vectores son  $\vec{u}(3, -1, 5)$ ,  $\vec{v}(4, 5, 11)$ ,  $\vec{w}(-2, k, 3)$ .

a) Calcula  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

b) Halla  $k$  para que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sean perpendiculares.

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -1, 5) \cdot (4, 5, 11) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 + 5 \cdot 11 = 12 - 5 + 55 = 62$

b) Como  $\vec{v} \neq 0$  y  $\vec{w} \neq 0$ , son perpendiculares si  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 4 \cdot (-2) + 5 \cdot k + 11 \cdot 3 = -8 + 5k + 33 = 5k + 25 = 0 \rightarrow k = -5$$

### Página 139

**2** Dados los vectores  $\vec{u}(5, -1, 2)$ ,  $\vec{v}(-1, 2, -2)$ , calcula:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b)  $|\vec{u}|$  y  $|\vec{v}|$

c)  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$

d) Proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$  y proyección de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$ . (Segmento y vector).

e) ¿Cuánto tiene que valer  $x$  para que el vector  $(7, 2, x)$  sea perpendicular a  $\vec{u}$ ?

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b)  $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5,48$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

c)  $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0,669 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 132^\circ 1' 26''$

d) Segmento proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-11}{3} = -3,67$


Significa que el vector proyección de  $\vec{u}$  en la dirección de  $\vec{v}$  tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de  $\vec{v}$ .

$$\text{Vector proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{-11}{9} (-1, 2, -2)$$

$$\text{Segmento proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2,008$$

$$\text{Vector proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{-11}{30} (5, -1, 2)$$

e)  $(5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-33}{2}$

**3**  **Cabezas pensantes.** [Antes de buscar los vectores, el alumnado podrá compartir en pequeños grupos el método que hay que seguir para encontrarlos].

Obtén tres vectores que no sean paralelos entre sí y que sean perpendiculares a este otro vector:

$$\vec{v}(3, 2, 7)$$

Un vector,  $\vec{u}(x, y, z)$ , es perpendicular a  $\vec{v}(3, 2, 7)$  si:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo:  $(0, -7, 2)$ ;  $(-7, 0, 3)$ ;  $(-2, 3, 0)$ .

**4** **Halla un vector que sea perpendicular a estos dos vectores dados:**

$$\vec{u}(5, -1, 2) \quad \vec{v}(-1, 2, -2)$$

Queremos hallar las coordenadas de un vector  $\vec{w}(x, y, z)$  que sea perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} \perp \vec{u} \Rightarrow (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es  $x = -2$ ,  $y = 8$ ,  $z = 9$ .

Es decir, el vector buscado puede ser  $(-2, 8, 9)$  o cualquier otro paralelo a él.

## 4 ► PRODUCTO VECTORIAL

Página 141

---

**1** Halla el producto vectorial de  $\vec{u}(3, 7, -6)$  y  $\vec{v}(4, 1, -2)$ .

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$$

**2** Halla un vector perpendicular a estos dos vectores:

$$\vec{u}(3, 7, -6) \quad \vec{v}(4, 1, -2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25) \text{ o cualquier vector proporcional a él.}$$

**3** Halla el área del triángulo determinado por los siguientes vectores:

$$\vec{u}(3, 7, -6) \quad \vec{v}(4, 1, -2)$$

Área del paralelogramo determinado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| = \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1013}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1013}}{2} \approx 15,91 \text{ u}^2$$

## 5 ▶ PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

Página 142

---

**1** Halla el volumen del paralelepípedo definido por los siguientes vectores:

$$\vec{u}(3, -5, 1) \quad \vec{v}(7, 4, 2) \quad \vec{w}(0, 6, 1)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \rightarrow \text{Volumen} = 53 \text{ u}^3$$

**2** Halla el valor de  $x$  para que los vectores  $\vec{u}(3, -5, 1)$ ,  $\vec{v}(7, 4, 2)$  y  $\vec{z}(1, 14, x)$  sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo que determinan sea cero).

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \rightarrow x = 0$$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 143

### 1. Combinación lineal de vectores

Hazlo tú

- Dados estos vectores:

$$\vec{u}(1, -3, 2), \vec{v}(-2, 6, -4), \vec{w}(2, 0, 1)$$

- a) Expresa, si es posible,  $\vec{u}$  como combinación lineal de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .
- b) ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ ?

a)  $(1, -3, 2) = x(-2, 6, -4) + y(2, 0, 1)$

Obtenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 2y = 1 \\ 6x = -3 \\ -4x + y = 2 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{-1}{2}, y = 0$$

La solución obtenida es  $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v} + 0\vec{w}$ .

- b) Observando el apartado anterior, vemos que  $-2\vec{u} = \vec{v}$ , luego no pueden ser linealmente independientes los tres vectores.

### 2. Vectores perpendiculares

Hazlo tú

- a) Comprueba si los vectores  $\vec{a}(2, -1, 0)$  y  $\vec{b}(1, -2, -1)$  son ortogonales.
- b) Halla un vector unitario que sea perpendicular a  $\vec{a}$  y a  $\vec{b}$ .

a)  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1, 0) \cdot (1, -2, -1) = 4 \neq 0 \rightarrow \text{No son ortogonales.}$$

- b)  $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$  es perpendicular a los dos vectores.

$$\vec{u} = (2, -1, 0) \times (1, -2, -1) = (1, 2, -3)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\text{El vector que nos piden es: } \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3) = \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$



### 3. Productos escalar y vectorial

#### Hazlo tú

- Con los mismos vectores, halla:

a)  $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

b)  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

a)  $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = -24 + 12^2 = 120$

b)  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 4^2 + 24 - 24 - 12^2 = -128$

### 4. Base y coordenadas

#### Hazlo tú

- Con los datos del enunciado anterior, calcula:

$$[\vec{u}, -\vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}]$$

$$[\vec{u}, -\vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = [(1, 0, -1), (0, -1, -1), (1, -1, 1)] = -3$$

### 6. Vectores coplanarios

#### Hazlo tú

- a) Halla el valor de  $m$  para que los vectores  $\vec{u}(2, 3, 0)$ ,  $\vec{v}(1, m, -1)$  y  $\vec{w}(-2, 0, 6)$  sean coplanarios.

- b) Comprueba si para ese valor de  $m$  algún par de los vectores dados son perpendiculares.

- a)  $\vec{w}$  es coplanario con  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  si el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores es cero.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 12m - 12 = 0 \rightarrow m = 1$$

Luego los vectores son coplanarios si  $m = 1$ .

- b)  $\vec{u} = (2, 3, 0)$ ,  $\vec{v} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{w} = (-2, 0, 6)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3, 0) \cdot (1, 1, -1) = 5 \neq 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3, 0) \cdot (-2, 0, 6) = -4 \neq 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (1, 1, -1) \cdot (-2, 0, 6) = -8 \neq 0$$

Ningún par de los vectores dados son perpendiculares.

## 7. Hallar un vector con ciertas condiciones

### Hazlo tú

- Dados estos vectores:

$$\vec{u}(3, -2, \sqrt{3}), \quad \vec{v}(4, -2, -4)$$

halla  $|\vec{u}|$ ,  $|\vec{v}|$ ,  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  y el vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ .

$$\vec{u} = (3, -2, \sqrt{3}), \quad \vec{v} = (4, -2, -4)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 4 + 3} = 4$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(3, -2, \sqrt{3}) \cdot (4, -2, -4)}{6 \cdot 4} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{24}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\frac{16 - 4\sqrt{3}}{24}\right) = \arccos 0,37799 = 1,1832 \text{ rad}$$

$\vec{w}$  = vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ .

$$\text{Vector proyección} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{36} (4, -2, -4) = \left(\frac{16}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3} - \frac{8}{9}, \frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{16}{9}\right)$$

Y tiene el mismo sentido que  $\vec{v}$  por ser  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ .

## 8. Ángulo que forman dos vectores

### Hazlo tú

- Halla  $|\vec{a} + \vec{b}|$  sabiendo que  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 8$  y  $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 45^\circ$ .

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$= 36 + 64 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100 + 48\sqrt{2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{100 + 48\sqrt{2}}$$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 146

### 1. Módulo del vector suma de otros dos

- Calcular el módulo del vector  $\vec{s}$  suma de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  de los que conocemos  $|\vec{a}| = 8$ ,  $|\vec{b}| = 6$  y que forman un ángulo de  $75^\circ$ .

El ángulo opuesto a la diagonal es  $\frac{360^\circ - 2 \cdot 75^\circ}{2} = 105^\circ$ .

$$|\vec{s}|^2 = 64 + 36 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 105^\circ = 100 + 96 \cdot 0,2588 = 124,84 \rightarrow |\vec{s}| = 11,2$$

### 2. Volumen de un paralelepípedo

- Hallar el valor de  $m$  para que los vectores  $\vec{a}(3, 0, 1)$ ,  $\vec{b}(0, m, -1)$  y  $\vec{a} \times \vec{b}$  determinen un paralelepípedo de volumen igual a  $49 \text{ u}^3$ .

Calculamos  $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} = (3, 0, 1) \times (0, m, -1) = (-m, 3, 3m)$ .

Volumen del paralelepípedo:

$$[\vec{u}, \vec{a}, \vec{b}] = B_1 = 10m^2 + 9$$

Igualamos a 49:

$$10m^2 + 9 = 49 \rightarrow m = 2, m = -2$$

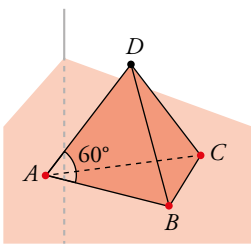
### 3. Tetraedro regular

- Sea  $ABCD$  un tetraedro regular de arista  $a$ . Demostrar que:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$

- b) Las aristas opuestas son ortogonales.

a)



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2$$

Lo mismo ocurre con todos los productos.

b)  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0$$

Luego  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ .

#### 4. Base y coordenadas

- Dados los vectores  $\vec{a}(1, -1, 0)$ ,  $\vec{b}(0, 1, -3)$ ,  $\vec{c}(0, 2, -1)$  y  $\vec{d}(7, -4, 5)$ :

a) Justificar cuál de los siguientes conjuntos  $B_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ ,  $B_2 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$  o  $B_3 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  es una base.

b) Determinar las coordenadas de  $\vec{d}$  en dicha base.

a)  $B_1$  y  $B_2$  no son bases porque no tienen exactamente 3 vectores.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Los vectores son linealmente independientes.}$$

$B_3$  sí es una base porque está formada por 3 vectores linealmente independientes.

b)  $(7, -4, 5) = x(1, -1, 0) + y(0, 1, -3) + z(0, 2, -1)$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x = 7 \\ -x + y + 2z = -4 \\ -3y - z = 5 \end{array} \right\} \rightarrow x = 7, y = -\frac{13}{5}, z = \frac{14}{5}$$

Las coordenadas de  $\vec{d}$  en la base  $B_3$  son:  $\vec{d} \left( 7, -\frac{13}{5}, \frac{14}{5} \right)$

#### 5. Módulo de un vector

- En un vértice de un cubo se aplican tres fuerzas,  $\vec{f}_1$ ,  $\vec{f}_2$  y  $\vec{f}_3$  dirigidas según las diagonales de las tres caras que pasan por dicho vértice. Si sus módulos son, respectivamente, 1, 2 y 3, hallar el módulo de la resultante.

$$\begin{aligned} |\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3|^2 &= (\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3) \cdot (\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3) = \\ &= \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_1 + \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 + \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_3 + \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_2 + \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_3 + \vec{f}_3 \cdot \vec{f}_1 + \vec{f}_3 \cdot \vec{f}_2 + \vec{f}_3 \cdot \vec{f}_3 = \\ &= |\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 + |\vec{f}_3|^2 + 2\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 + 2\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_3 + 2\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_3 = \\ &= 1 + 4 + 9 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos(60^\circ) + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos(60^\circ) + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(60^\circ) = \\ &= 14 + 2 + 3 + 6 = 25 \rightarrow |\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3| = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 147

### Para practicar

#### Dependencia e independencia lineal. Base y coordenadas

1 a) Comprueba que los vectores  $\vec{u} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{v} = (2, 1, 0)$  y  $\vec{w} = (-2, -1, 3)$  forman una base.

b) Halla las coordenadas de los vectores  $\vec{a} = (1, 2, 1)$  y  $\vec{b} = (-1, 0, 2)$  respecto de esa base.

$$a) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [(1, 1, -1), (2, 1, 0), (-2, -1, 3)] = -3$$

$$b) (1, 2, 1) = x(1, 1, -1) + y(2, 1, 0) + z(-2, -1, 3) \rightarrow x = 3, y = 1/3, z = 4/3$$

Por tanto,  $\vec{a} = (3, 1/3, 4/3)$  respecto de la base formada por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

$$(-1, 0, 2) = x(1, 1, -1) + y(2, 1, 0) + z(-2, -1, 3) \rightarrow x = 1, y = 0, z = 1$$

2 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base? Justifica tus respuestas:

$$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$$

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$$

$$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$$

Como  $(2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1)$ , los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son una base.

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Al ser cuatro vectores en  $\mathbb{R}^3$ , son dependientes, luego no son una base.

$$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Los vectores son linealmente independientes.}$$

Un conjunto de tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  linealmente independientes es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

3 Comprueba que no es posible expresar el vector  $\vec{x}(3, -1, 0)$  como combinación lineal de  $\vec{u}(1, 2, -1)$  y  $\vec{v}(2, -3, 5)$ .

¿Son linealmente independientes  $\vec{x}$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ?

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \rightarrow (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$$

$$\begin{cases} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{cases} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como  $|A'| = 28 \neq 0$ , el sistema es *incompatible*.

Luego no es posible expresar  $\vec{x}$  como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

Como  $\text{ran}(A') = 3$ , los tres vectores son linealmente independientes.

- 4** Comprueba que cualquiera de los vectores  $\vec{a}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{b}(2, 1, 3)$ ,  $\vec{c}(1, 0, 1)$  puede expresarse como C.L. de los otros dos.

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \rightarrow (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array} \quad \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que:  $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$ ;  $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

- 5**  **Parada de 5 minutos.** [La reflexión por parejas que plantea esta técnica puede ser una buena forma de que el alumnado coopere para decidir cómo calcular los coeficientes].

Determina  $m$  y  $n$  para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:

- a)  $\vec{u}(m, -3, 2)$ ,  $\vec{v}(2, 3, m)$ ,  $\vec{w}(4, 6, -4)$       b)  $\vec{u}(3, 2, 5)$ ,  $\vec{v}(2, 4, 7)$ ,  $\vec{w}(1, -1, n)$

a)  $\begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6m^2 - 24m - 24 = -6(m^2 + 4m + 4) = -6(m + 2)^2 = 0 \rightarrow m = -2$

Si  $m = -2$ , los vectores son linealmente dependientes.

b)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 8n + 5 = 0 \rightarrow n = \frac{-5}{8}$

Si  $n = \frac{-5}{8}$ , los vectores son linealmente dependientes.

- 6** a) ¿Para qué valores del parámetro  $a$  el conjunto de vectores  $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$  es una base?

b) Para  $a = 2$  halla, si es posible, las coordenadas del vector  $(0, 1, 0)$  respecto de esa base.

a) Como son tres vectores de  $\mathbb{R}^3$ , formarán una base cuando sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a - 1) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

Por tanto,  $S$  es una base cuando  $a \neq 0$  y  $a \neq 1$ .

b)  $(0, 1, 0) = x(1, 1, 1) + y(2, 1, 1) + z(1, 2, 0) \rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{-1}{2}, z = \frac{1}{2}$

En la base  $S$ , el vector  $(0, 1, 0)$  tiene coordenadas  $(1/2, -1/2, 1/2)$ .

- 7** ¿Qué relación ha de existir entre  $m$  y  $n$  para que los vectores  $\vec{u}(m, -1, 0)$ ,  $\vec{v}(2, 0, n)$  y  $\vec{w}(1, 1, -2)$  sean linealmente dependientes?

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -mn - n - 4$$

Los vectores son coplanarios, es decir, linealmente dependientes si  $-mn - n - 4 = 0 \rightarrow mn + n = -4$

- 8** Prueba que los vectores  $(1, a, b)$ ,  $(0, 1, c)$ ,  $(0, 0, 1)$  son linealmente independientes cualesquiera que sean  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a, b, c.$$

Por tanto, son linealmente independientes.

## Producto de vectores

**9** En una base ortonormal tenemos  $\vec{a}(1, 2, 2)$  y  $\vec{b}(-4, 5, -3)$ . Calcula:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$                                       b)  $|\vec{a}|$  y  $|\vec{b}|$                                       c)  $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

d)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$                                       e)  $\vec{a} \times \vec{b}$                                       f)  $|\vec{a} \times \vec{b}|$

g) La proyección de  $\vec{a}$  sobre  $\vec{b}$ .                                      h) El vector proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$ .

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b)  $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$

c) Como  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$

d)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 9 - 50 = -41$

e)  $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 2, 2) \times (-4, 5, -3) = (-16, -5, 13)$

f)  $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-16)^2 + (-5)^2 + (13)^2} = 15\sqrt{2}$

g)  $|\vec{b}| = \sqrt{50}$

Segmento proyección =  $proy_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3)}{\sqrt{50}} = 0$

$\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son perpendiculares, luego el segmento proyección mide 0 unidades.

h) Vector proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$  (vector cero).

**10** Dados los siguientes vectores:

$$\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k} \quad \vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$$

halla  $m$  para que los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sean...

a) paralelos.

b) ortogonales.

c)  $|\vec{a}| = 4$

$\vec{a}(1, m, 1); \vec{b}(-2, 4, m)$

a)  $\frac{-2}{1} = \frac{4}{m} = \frac{m}{1} \rightarrow m = -2$

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{5}$

c)  $|\vec{a}|^2 = 16 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = 16 \rightarrow (1, m, 1) \cdot (1, m, 1) = 16 \rightarrow 1 + m^2 + 1 = 16 \rightarrow m = \pm\sqrt{14}$

**11** Halla el vector proyección del vector  $\vec{u}(3, 1, 2)$  sobre el vector  $\vec{v}(1, -1, 2)$ .

Vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ :

$$\frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{|(1, -1, 2)|^2} (1, -1, 2) = \frac{3 - 1 + 4}{1^2 + 1^2 + 2^2} (1, -1, 2) = \frac{6}{6} (1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

La proyección es el propio vector  $\vec{v}$ .

Vamos a comprobarlo de manera razonada.

Longitud de la proyección:

$$|\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

El vector proyección se obtiene multiplicando su longitud por un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que  $\vec{v}$ :  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ .

Vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ :

$$\sqrt{6} \cdot \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

**12** ¿Son  $\vec{a}(1, 2, 3)$  y  $\vec{b}(2, -2, 1)$  ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{no son ortogonales.}$$

Si llamamos  $\alpha$  al ángulo que forman, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{9}} \approx 0,089 \rightarrow \alpha = 84^\circ 53' 20''$$

**13** Comprueba si el vector  $\vec{u} = (1/2, 1/2, 0)$  es unitario. Si no lo es, halla las coordenadas de dos vectores unitarios de la misma dirección que  $\vec{u}$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \rightarrow \vec{u} \text{ no es unitario.}$$

Un vector unitario de la misma dirección que  $\vec{u}$  sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right). \text{ También podría ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$


**14** Dados  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  y  $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ , comprueba que los vectores  $\vec{u} \times \vec{v}$  y  $\vec{v} \times \vec{u}$  son opuestos, y halla su módulo.

$$\vec{u} (2, -1, 1); \vec{v} (-1, 3, 2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5); \vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{5\sqrt{3}}{2} u^2$$

**15**  **Lápices al centro.** [Esta estrategia puede resultar conveniente para encontrar los vectores que pide el enunciado].

Dados los vectores  $\vec{u}(1, -1, 0)$  y  $\vec{v}(2, 0, 1)$ , halla un vector ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  que sea unitario y otro vector también ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  cuyo módulo sea  $\sqrt{24}$ .

Un vector ortogonal a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$  es  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \middle| \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \middle| \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)$$

Un vector unitario perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$  es:

$$\frac{1}{|(-1, -1, 2)|} (-1, -1, 2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2)$$

Para que el módulo sea  $\sqrt{24}$ :

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2) = 2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$$

El vector  $(-2, -2, 4)$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ , y su módulo es  $\sqrt{24}$ .

También cumple estas condiciones su opuesto:  $(2, 2, -4)$ .



**16** Calcula, en cada caso, el ángulo que forman los vectores dados.

a)  $\vec{u} = (1, -3, 2)$  y  $\vec{v} = (1, 0, -1)$

b)  $\vec{u} = (3, 4, 0)$  y  $\vec{v} = (4, 0, 2)$

c)  $\vec{u} = (2, -4, 0)$  y  $\vec{v} = (-1, 2, 0)$

Utilizamos en cada caso la igualdad:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha$$

a)  $-1 = \sqrt{14}\sqrt{2} \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{28}}\right) \rightarrow \alpha = 100^\circ 53' 36''$

b)  $12 = 5\sqrt{20} \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{12}{5\sqrt{20}}\right) \rightarrow \alpha = 57^\circ 32' 37''$

c)  $-10 = \sqrt{20}\sqrt{5} \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-10}{\sqrt{100}}\right) \rightarrow \alpha = 180^\circ$

**17** Halla el producto mixto de los tres vectores que aparecen en cada caso:

a)  $\vec{u}(1, -3, 2)$ ,  $\vec{v}(1, 0, -1)$ ,  $\vec{w}(2, 3, 0)$

b)  $\vec{u}(3, 2, 1)$ ,  $\vec{v}(1, -2, 0)$ ,  $\vec{w}(-4, 1, 1)$

c)  $\vec{u}(1, 2, -1)$ ,  $\vec{v}(3, 0, 2)$ ,  $\vec{w}(-1, 4, -4)$

Calcula, en cada apartado, el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

a)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$

El paralelepípedo tiene un volumen de  $15 \text{ u}^3$ .

b)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$

El paralelepípedo tiene un volumen de  $15 \text{ u}^3$ .

c)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Los tres vectores no forman un paralelepípedo (los vectores son coplanarios).

**18** Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por  $\vec{u}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{v}(-2, 1, 0)$  y  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Justifica por qué el resultado es  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$ .

•  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow \text{Volumen} = 70 \text{ u}^3$$

•  $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |(\vec{u} \times \vec{v})|^2$$

**19** Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores siguientes:

$$\vec{a}(3, -1, 1), \quad \vec{b}(1, 7, 2), \quad \vec{c}(2, 1, -4)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 111 = 18,5 \text{ u}^3$$

**20** Dados los vectores  $\vec{a}(1, 2, -1)$  y  $\vec{b}(1, 3, 0)$ , comprueba que el vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  es perpendicular a  $\vec{a} + \vec{b}$  y a  $\vec{a} - \vec{b}$ .

$$\vec{a}(1, 2, -1)$$

$$\vec{b}(1, 3, 0)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$$

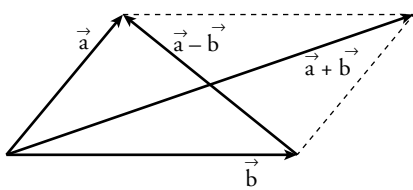
$$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0. \text{ Por tanto, } \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}.$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0. \text{ Por tanto, } \vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}.$$

Hasta aquí, la comprobación rutinaria, numérica. Más interesante es la siguiente reflexión:



Los vectores  $\vec{a} + \vec{b}$  y  $\vec{a} - \vec{b}$  son las diagonales del paralelogramo determinado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Por tanto, están en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Y el vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  es perpendicular a dicho plano.

Así,  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son perpendiculares a  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

Para resolver

21 Considera los siguientes vectores:

$$\vec{u}(1, -1, 3), \quad \vec{v}(1, 0, -1), \quad \vec{w}(m, 1, 0)$$

- a) Calcula el valor de  $m$  para el cual  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  son ortogonales.  
 b) Halla los valores de  $m$  que hacen que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sean linealmente independientes.  
 c) Para  $m = 1$  escribe el vector  $\vec{s}(3, 0, 2)$  como combinación lineal de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

a)  $\vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, -1, 3) \cdot (m, 1, 0) = m - 1 \rightarrow m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$$

Son ortogonales cuando  $m = 1$ .

- b) Los vectores son linealmente independientes si el rango de la matriz que forman es 3, es decir, si el determinante de la matriz que forman no vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ m & 1 & 0 \end{vmatrix} = m + 4$$

Son linealmente independientes si  $m \neq -4$

- c)  $(3, 0, 2) = x(1, -1, 3) + y(1, 0, -1) + z(1, 1, 0)$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + \quad z = 0 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right\} \rightarrow x = 1, y = 1, z = 1$$

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

22 Sean los vectores  $\vec{u} = (-1, 4, 8)$  y  $\vec{v} = (1, 2, -2)$ :

- a) Demuestra que el ángulo formado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es mayor que  $90^\circ$ .  
 b) Calcula un vector perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  que tenga módulo 1.

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + 8 - 16 = -9$

Por tanto, el coseno del ángulo que forman los dos vectores es negativo y, por tanto, dicho ángulo es mayor que  $90^\circ$ .

b)  $\vec{u} \times \vec{v} = -24\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$

Por tanto, los vectores que cumplen la condición son:

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{24^2 + 6^2 + 6^2}} (-24, 6, -6) = \frac{\pm 1}{18\sqrt{2}} (-24, 6, -6)$$

23 a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores  $\vec{u}(3, -2, 1)$  y  $\vec{v}(4, 3, -6)$  es un rectángulo.

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas  $|\vec{u} \times \vec{v}|$ .

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$ . Luego  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

b)  $\left. \begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array} \right\} \text{Área} = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$

Por otra parte:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

- 24** Dados los siguientes vectores:  $\vec{u}_1(2, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_2(0, 1, -3)$ ,  $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ , ¿qué relación deben cumplir  $a$  y  $b$  para que  $\vec{u}_3$  sea ortogonal al vector  $\vec{v}(1, 1, 1)$ ?

$$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$$

Para que  $\vec{u}_3$  sea perpendicular a  $\vec{v}$  ha de ser:

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0, \text{ es decir, } a = b.$$

- 25** Calcula las coordenadas de un vector  $\vec{u}$  que sea ortogonal a  $\vec{v}(1, 2, 3)$  y  $\vec{w}(1, -1, 1)$  y tal que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$ .

$$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$$

Un vector ortogonal a  $\vec{v}$  y a  $\vec{w}$  es de la forma  $(5k, 2k, -3k)$ .

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Por tanto:  $\vec{u} \left( \frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2} \right)$

- 26** a) Determina los valores de  $a$  para los que resultan linealmente dependientes los vectores  $(-2, a, a)$ ,  $(a, -2, a)$  y  $(a, a, -2)$ .

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

$$a) \begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2 = 0 \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

Para  $a = 1$  y para  $a = -2$ , los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para  $a = 1$ , queda:  $(-2, 1, 1)$ ,  $(1, -2, 1)$ ,  $(1, 1, -2)$  y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Para  $a = -2$ , queda:  $(-2, -2, -2)$ ,  $(-2, -2, -2)$ ,  $(-2, -2, -2)$  y tenemos que:

$$1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

- 27** Halla el valor de  $b$  para que los vectores  $\vec{u} = (1, b, 2)$  y  $\vec{v} = (-1, 1, 2)$  formen un ángulo de  $60^\circ$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 60^\circ \rightarrow 3 + b = \sqrt{5+b^2} \sqrt{6} \frac{1}{2} \rightarrow 2(3+b) = \sqrt{5+b^2} \sqrt{6} \rightarrow \\ &\rightarrow 4(3+b)^2 = 6(5+b^2) \rightarrow b = 6 \pm \sqrt{39} \end{aligned}$$

- 28** De dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , conocemos  $|\vec{u}| = 12$ ;  $|\vec{v}| = 10$ ;  $|\vec{u} - \vec{v}| = 20$ . Calcula:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) El ángulo que forman  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

c) El ángulo que forman  $\vec{u}$  y  $\vec{u} - \vec{v}$ .

\* Mira el problema resuelto 8.

$$\begin{aligned} a) |\vec{u} - \vec{v}| = 20 \rightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= 400 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 400 \rightarrow \\ &\rightarrow 144 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + 100 = 400 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{-156}{2} = -78 \end{aligned}$$

$$b) \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha \rightarrow -78 = 12 \cdot 10 \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos \left( \frac{-78}{120} \right) = 130^\circ 32' 30''$$

$$c) \vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} = 144 + 78 = 222$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}| |\vec{u} - \vec{v}| \cos \alpha \rightarrow 222 = 12 \cdot 20 \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos \left( \frac{222}{240} \right) = 22^\circ 19' 54''$$

- 29** Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que los vectores  $\vec{u} = (a, 1, b)$  y  $\vec{v} = (-2, a, 1)$  sean ortogonales y sus módulos sean iguales.

Los vectores son ortogonales:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow -2a + a + b = 0 \rightarrow -a + b = 0 \rightarrow a = b$$

Sus módulos son iguales:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 1 + b^2} &= \sqrt{4 + a^2 + 1} \rightarrow \sqrt{a^2 + 1 + a^2} = \sqrt{4 + a^2 + 1} \rightarrow \\ \rightarrow \sqrt{2a^2 + 1} &= \sqrt{5 + a^2} \rightarrow 2a^2 + 1 = 5 + a^2 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \rightarrow b = \pm 2 \end{aligned}$$

Por tanto, hay dos soluciones:

$$\vec{u} = (2, 1, 2), \vec{v} = (-2, 2, 1) \quad \vec{u} = (-2, 1, -2), \vec{v} = (-2, -2, 1)$$

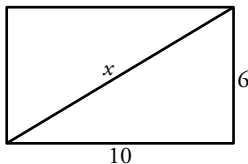
- 30** De dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sabemos que son ortogonales y que  $|\vec{u}| = 6$  y  $|\vec{v}| = 10$ . Halla  $|\vec{u} + \vec{v}|$  y  $|\vec{u} - \vec{v}|$ .

Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales, entonces  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Así:

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66 \end{aligned}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66$$

Observación: Si  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura  $|\vec{u}|$  y  $|\vec{v}|$ . En este caso,  $\vec{u} + \vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{v}$  son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 136 \rightarrow x = \sqrt{136} \approx 11,6$$

- 31** Dados los vectores  $\vec{u} = (1, -3, 2)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, -1)$  y  $\vec{w} = (2, 1, 3)$ , calcula:

a) El volumen del paralelepípedo que determinan esos tres vectores.

b) La medida de la altura de ese paralelepípedo tomando como base la cara determinada por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

a) Volumen =  $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |18| = 18 \text{ u}^3$

b) Volumen =  $A_{\text{base}} \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h = |(3, 3, 3)| \cdot h = 3\sqrt{3} \cdot h \rightarrow 18 = 3\sqrt{3} \cdot h \rightarrow h = \frac{6}{\sqrt{3}} \text{ u}$

- 32** Dados los siguientes vectores  $\vec{u}(1, -1, 0)$ ,  $\vec{v}(0, 1, 2)$  y  $\vec{w}(k+1, 2k, 2-3k)$ , halla los valores de  $k$ :

a) para que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sean coplanarios.

b) para que  $\vec{w}$  sea perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ .

c) para que el volumen del tetraedro que tiene por aristas los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sea igual a  $1/6$ .

a) Si los vectores son coplanarios, entonces son linealmente dependientes, es decir, el rango de la matriz que forman es  $< 3$ , luego el determinante de la matriz vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ k+1 & 2k & 2-3k \end{vmatrix} = -9k = 0 \rightarrow k = 0$$

b)  $\vec{w}$  tiene que ser proporcional al producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

$$(1, -1, 0) \times (0, 1, 2) = (-2, -2, 1)$$

$$\frac{k+1}{-2} = \frac{2k}{-2} = \frac{2-3k}{1}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2k = -4 + 6k \\ k + 1 = 2k \end{array} \right\} \rightarrow k = 1$$

c) El volumen del tetraedro es:

$$\left| \frac{1}{6} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ k+1 & 2k & 2-3k \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{9}{6}k = \frac{1}{6} \rightarrow k = \frac{1}{9}$$

### 33 Dados los siguientes vectores:

$$\vec{u}(1, 0, -1), \quad \vec{v}(0, a+1, 0), \quad \vec{w}(1, 1, a-1)$$

a) Halla los valores de  $a$  para los que los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector  $\vec{c}(1, 2, 3)$  depende linealmente de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  para el caso  $a = 2$ .

c) Justifica razonadamente si para  $a = 1$  se cumple la igualdad  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ .

$$a) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a+1) = 0 \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

b) Para  $a = 2$ , los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes. Como son tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  linealmente independientes, forman una base de  $\mathbb{R}^3$ .

Así, cualquier otro vector, y, en particular  $\vec{c}(1, 2, 3)$ , depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para  $a = 2$ , tenemos que:  $\vec{u}(1, 0, -1)$ ,  $\vec{v}(0, 3, 0)$ ,  $\vec{w}(1, 1, 1)$ .

$$(1, 2, 3) = x(1, 0, -1) + y(0, 3, 0) + z(1, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ 3y + z = 2 \\ -x + z = 3 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6}{6} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Por tanto:

$$\vec{c} = -\vec{u} + 2\vec{w}$$

c)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$  para  $a = 1$ . Está probado en el apartado a).

- 34** Halla un vector  $\vec{u}$  de la misma dirección que  $\vec{v}(1, -2, 3)$  y tal que determine con el vector  $\vec{w}(-2, 4, -1)$  un paralelogramo de área  $25 u^2$ .

Si  $\vec{u}$  es de la misma dirección que  $\vec{v}(1, -2, 3)$ , será de la forma  $\vec{u}(x, -2x, 3x)$ , con  $x \neq 0$ .

Para que forme con  $\vec{w}(-2, 4, -1)$  un paralelogramo de área  $25 u^2$ , ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x| \sqrt{125} = 25$$

$$\text{Es decir: } 125x^2 = 625 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Por tanto, hay dos soluciones:  $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$  y  $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$ .

- 35** Halla un vector  $\vec{v}$  coplanario con  $\vec{a}(2, -1, 1)$  y  $\vec{b}(1, 0, 3)$  y ortogonal a  $\vec{c}(2, 3, 0)$ .

Sea  $\vec{v}(x, y, z)$  tal que:

$$1.^\circ) \text{ es coplanario con } \vec{a} \text{ y } \vec{b}, \text{ es decir: } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

$$2.^\circ) \text{ es ortogonal a } \vec{c}, \text{ es decir: } (x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x + z = 5y \\ 2x = -3y \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \frac{9}{2}y = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{array} \right\}$$

Soluciones:  $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$  ( $\lambda \neq 0$ )

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para  $\lambda = 1$ , tenemos el vector  $(-3, 2, 1)$ .

- 36** Sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  tales que  $|\vec{a}| = 4$  y  $|\vec{b}| = 2$ , con  $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60^\circ$ . Calcula  $|\vec{a} + \vec{b}|$  y  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = \\ &= 16 + 4 + 8 = 28 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 16 + 4 - 8 = 12 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

### Cuestiones teóricas

- 37** a) ¿Cuál es el número de vectores linealmente independientes que hay en este conjunto?:  
 $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$
- b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de  $S$ ?
- c) ¿Existe algún vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de  $S$ ?

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \text{ } \text{ran}(M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en  $S$ .

b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma:  $\vec{u} = (k, k, k)$  con  $k \neq 0$ .  
Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de  $S$  como sigue:

$$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$$

c) Sea  $\vec{v} = (1, 1, x)$  el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de  $S$ , tenemos que:

$$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array} \right\} \text{ Debe tener solución: } b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow x = -1$$

Por tanto, el vector es  $\vec{v} = (1, 1, -1)$ .

**38 Prueba, utilizando el producto escalar, que si  $\vec{a} \perp \vec{b}$  y  $\vec{a} \perp \vec{c}$  entonces  $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$ .**

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

Para demostrar que  $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$ , tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$$

Por tanto,  $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$ .

**39 ¿Cómo han de ser dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  para que  $\vec{u} + \vec{v}$  sea perpendicular a  $\vec{u} - \vec{v}$ ?**

Debe ocurrir:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

Por tanto,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  deben tener el mismo módulo.

## Página 149

**40 a) Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ , ¿podemos asegurar que  $\vec{v} = \vec{w}$ ?**

**b) Si  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ , ¿es  $\vec{b} = \vec{c}$  necesariamente?**

**Justifica tus respuestas y pon ejemplos.**

a) No. Por ejemplo, si  $\vec{u} = (3, -2, 0)$ ,  $\vec{v} = (5, 1, 0)$  y  $\vec{w} = (7, 4, 0)$ , tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array} \right\} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo,  $\vec{v} \neq \vec{w}$

b) No. Por ejemplo, si consideramos  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (2, 4, 6)$  y  $\vec{c} = (3, 6, 9)$ , entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ pero } \vec{b} \neq \vec{c}$$

**41 a) ¿Puede haber dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tales que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ ,  $|\vec{u}| = 1$ ,  $|\vec{v}| = 2$ ?**

**b) Si dos vectores verifican  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}|$ , ¿qué puedes decir del ángulo que forman?**

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 2 \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 3 \rightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{3}{2} > 1 \text{ Imposible.}$$

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.



$$b) \text{ Si } |\vec{u}| |\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \rightarrow |\vec{u}| |\vec{v}| = \begin{cases} +|\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{u, v}) \\ -|\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{u, v}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| |\vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{u, v}) \rightarrow \cos(\widehat{u, v}) = 1 \rightarrow (\widehat{u, v}) = 0^\circ \\ |\vec{u}| |\vec{v}| = -|\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{u, v}) \rightarrow \cos(\widehat{u, v}) = -1 \rightarrow (\widehat{u, v}) = 180^\circ \end{cases}$$

Por tanto,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tienen la misma dirección.

**42 ¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas y pon ejemplos.**

- a) Existen infinitos vectores coplanarios con  $\vec{a}(2, -3, 0)$  y  $\vec{b}(1, 0, -2)$  y ortogonales a  $\vec{c}(-1, 1, -4)$ .  
 b) Si  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 3$  y el ángulo que forman  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  es de  $60^\circ$ , entonces  $|\vec{a} + \vec{b}| = 8$ .  
 c) Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son dos vectores cualesquiera, se cumple la igualdad  $\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$ .  
 d) Si dos vectores son perpendiculares su producto vectorial es nulo.  
 e) El producto mixto de los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  es igual a 0, cualesquiera que sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .  
 f) Dos vectores ortogonales son siempre linealmente independientes.

a) Los vectores  $\vec{u}$  coplanarios con  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son:

$$\vec{u} = x(2, -3, 0) + y(1, 0, -2) = (2x + y, -3x, -2y)$$

para que sean ortogonales a  $\vec{c} = (-1, 1, -4)$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow (2x + y, -3x, -2y) \cdot (-1, 1, -4) = 0 \rightarrow 7y - 5x = 0 \rightarrow x = \frac{7}{5}\lambda, \text{ que tiene infinitas soluciones, luego es verdadero.}$$

Los vectores son de la forma:

$$\vec{u} = \frac{7}{5}\lambda(2, -3, 0) + \lambda(1, 0, -2) = \lambda\left(\frac{19}{5}, \frac{-21}{5}, \frac{-10}{5}\right) // \lambda(19, -21, -10)$$

$$b) |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{a, b}) =$$

$$= 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 7 \rightarrow \text{es falso.}$$

c) Verdadero:

$$\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} + \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \times \vec{v} + \vec{0} = \vec{0}$$

d) Falsa. Por ejemplo,  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$  son perpendiculares pero su producto vectorial es  $\vec{k}$ .

e) Verdadero, porque los tres vectores son linealmente dependientes, luego son coplanarios y por tanto, el producto mixto es cero.

Ejemplo:

$$a(1, 0, 0); b(0, 1, 0) \quad 2a - 3b = (2, -3, 0) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

f) Verdadero. Dos vectores son linealmente dependientes cuando el ángulo que forman es  $0^\circ$  o  $180^\circ$ . Dos vectores son ortogonales cuando forman un ángulo de  $90^\circ$ , por tanto, son linealmente independientes.

**43** [El razonamiento de la respuesta permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].

Si tres vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  son linealmente independientes, ¿podemos asegurar que los vectores  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$  también lo son? Razona tu respuesta.

$$\vec{a} = (1, 1, 0) \qquad \vec{b} = (1, -1, 0) \qquad \vec{c} = (1, 1, -1)$$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 2$ , por tanto, los vectores son linealmente independientes.

### Para profundizar

**44** [La búsqueda de los productos mixtos nulos permite trabajar esta estrategia].

Sean  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}], \quad [\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}], \quad [\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}]$$

Puesto que  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  son L.I., los tomamos como base. Por tanto:

$$\vec{a} + \vec{c} = (1, 0, 1) \qquad \vec{a} - \vec{c} = (1, 0, -1) \qquad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1, 1, 1)$$

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Son L.I.}$$

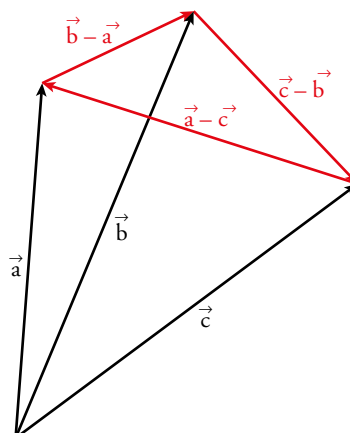
Análogamente:

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Son L.I.}$$

$$[\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \text{ Son L.D.}$$

Interpretación gráfica de este último resultado:

Los vectores  $\vec{a} - \vec{c}$ ,  $\vec{c} - \vec{b}$ ,  $\vec{b} - \vec{a}$  son los lados de un triángulo cuyos vértices son los extremos de  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  cuando los situamos con origen común. Por tanto,  $\vec{a} - \vec{c}$ ,  $\vec{c} - \vec{b}$  y  $\vec{b} - \vec{a}$  son coplanarios.



- 45** De los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sabemos que cumplen  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$ ,  $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$ , siendo  $\vec{a}(2, -1, 0)$  y  $\vec{b}(1, 3, -1)$ . Halla el ángulo formado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{b} \end{array}$$


---


$$\begin{array}{l} 5\vec{u} = 3\vec{a} + \vec{b} \\ 5\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}$$

El ángulo formado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  coincide con el ángulo formado por  $\vec{u}' = 5\vec{u}$  y  $\vec{v}' = 5\vec{v}$ :

$$\vec{u}' = (7, 0, -1); \quad \vec{v}' = (3, -5, 1)$$

$$\vec{u}' \cdot \vec{v}' = 20$$

$$|\vec{u}'| = \sqrt{50}; \quad |\vec{v}'| = \sqrt{35}$$

$$\cos(\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} ) = \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}'}{|\vec{u}'| |\vec{v}'|} = \frac{20}{\sqrt{50} \sqrt{35}} = 0,4781$$

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} = 61^\circ 26' 21''$$

- 46** Los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  cumplen las siguientes condiciones:

$$|\vec{u}| = 5, \quad |\vec{v}| = 4, \quad |\vec{w}| = 7, \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Calcula  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ .

Desarrollando el producto escalar indicado:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

Por otra parte:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

Así:

$$52 + 42 + 72 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{90}{2} = -45$$

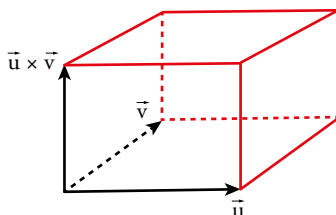
- 47** Dados  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tal que  $|\vec{u}| = 6$ ;  $|\vec{v}| = 8$ ;  $|\vec{u} - \vec{v}| = 10$ , halla el producto mixto  $[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}]$ .

$$|\vec{u} - \vec{v}| = 10 \rightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 100 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow 36 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 64 = 100 \rightarrow 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Por tanto,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales.

$|\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}|$  es el volumen del paralelepípedo determinado por  $\vec{u} \times \vec{v}$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , por tanto, como los tres vectores son ortogonales, dicho paralelepípedo es un ortoedro:



$$|[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}]| = |\vec{u} \times \vec{v}| |\vec{u}| |\vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} 90^\circ = |\vec{u}| |\vec{v}| = 36 \cdot 64 = 2304$$

Por tanto,  $[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = \pm 2304$ .

- 48** Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores ortogonales y unitarios. Halla el valor del parámetro  $a$  para que los vectores  $\vec{u} + a\vec{v}$  y  $\vec{u} - a\vec{v}$  formen un ángulo de  $60^\circ$ .

$$(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot a\vec{v} - \vec{u} \cdot a\vec{v} - a\vec{v} \cdot a\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} - a\vec{v} \cdot a\vec{v} = 1 - a^2$$

$$|\vec{u} + a\vec{v}|^2 = (\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} + a\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot a\vec{v} + a\vec{v} \cdot a\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + a\vec{v} \cdot a\vec{v} = 1 + a^2$$

$$|\vec{u} - a\vec{v}|^2 = (\vec{u} - a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot a\vec{v} + a\vec{v} \cdot a\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + a\vec{v} \cdot a\vec{v} = 1 + a^2$$

$$\cos((\vec{u} + a\vec{v}), (\vec{u} - a\vec{v})) = \cos 60^\circ = \frac{(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v})}{|\vec{u} + a\vec{v}| |\vec{u} - a\vec{v}|} = \frac{1 - a^2}{\sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + a^2}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \rightarrow a = \frac{1}{3} \sqrt{3}, a = -\frac{1}{3} \sqrt{3}$$

- 49** Demuestra que si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son dos vectores cualesquiera, entonces:  $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos^2 \alpha) + (|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \alpha) = (|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)) = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$$

- 50** Demuestra que  $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$  cualesquiera que sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} = \\ &= \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} = 2(\vec{u} \times \vec{v}) \end{aligned}$$

## AUTOEVALUACIÓN

Página 149

1 a) Halla  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que se verifique  $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$  siendo  $\vec{u}(1, -1, 0)$ ,  $\vec{v}(0, 1, 2)$ ,  $\vec{w}(-2, 0, 1)$ .

b) ¿Forman una base los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ ?

c) Escribe, si es posible, el vector  $\vec{r}(1, 1, 1)$  como combinación lineal de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

a)  $a(1, -1, 0) + b(0, 1, 2) + c(-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

Obtenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a - 2c = 0 \\ -a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a = 0, b = 0, c = 0$$

b) Sí, porque son tres vectores y son linealmente independientes.

c)  $\left. \begin{array}{l} a - 2c = 0 \\ -a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a = -\frac{1}{5}, b = \frac{4}{5}, c = -\frac{3}{5}$

$$\vec{r} = -\frac{1}{5}(1, -1, 0) + \frac{4}{5}(0, 1, 2) - \frac{3}{5}(-2, 0, 1)$$

2 Sean los vectores  $\vec{u}(3, -2, \sqrt{3})$  y  $\vec{v}(4, -2, -4)$ . Halla  $|\vec{u}|$ ,  $|\vec{v}|$ ,  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  y el vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ .

•  $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4$

•  $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$

•  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-4) \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 6} = \frac{12 + 4 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{4 - \sqrt{3}}{6} = 0,3780$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos(0,3780) = 67^\circ 47' 26''$

• Vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ :

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{16} (4, -2, -4) = \frac{4 - \sqrt{3}}{9} (4, -2, -4)$$

3 Dados los vectores  $\vec{u}(3, -4, 0)$  y  $\vec{v}(m, 0, 7)$ :

a) Halla  $m$  para que los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sean perpendiculares.

b) Halla un vector  $\vec{w}$  perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ .

c) Obtén tres vectores unitarios,  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$ ,  $\vec{w}'$ , que tengan, respectivamente, la misma dirección que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

d) ¿Forman  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$  y  $\vec{w}'$  una base ortonormal?

a) Como  $|\vec{u}| \neq 0$  y  $|\vec{v}| \neq 0$ ,  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3m + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 3m = 0 \rightarrow m = 0$$

Así,  $\vec{v}(0, 0, 7)$ .

b)  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ .

$$\vec{w} = (3, -4, 0) \times (0, 0, 7) = (-28, -21, 0)$$

$$c) |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{v}| = 7$$

$$|\vec{w}| = 7\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 7\sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$$

Sean:

$$\vec{u}' = \frac{1}{5}(3, -4, 0)$$

$$\vec{u}' \left( \frac{3}{5}, \frac{-4}{5}, 0 \right) // \vec{u}$$

$$\vec{v}' = \frac{1}{7}(0, 0, 7)$$

$$\vec{v}'(0, 0, 1) // \vec{v}$$

$$\vec{w}' = \frac{1}{35}(-28, -21, 0)$$

$$\vec{w}' \left( -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0 \right) // \vec{w}$$

$\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$ ,  $\vec{w}'$  tienen módulo 1.

d)  $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$  no son coplanarios al ser perpendiculares entre sí. Por tanto, forman una base.

Por ser perpendiculares entre sí y, además, unitarios, la base  $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$  es ortonormal.

**4 a)** Halla la relación que debe existir entre  $a$  y  $b$  para que los vectores  $\vec{u}(1, 2, -1)$ ,  $\vec{v}(0, 1, a)$  y  $\vec{w}(3, b, 0)$  sean coplanarios.

**b)** Para  $a = 3$  calcula el valor que debe tener  $b$  para que el volumen del paralelepípedo determinado por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sea  $10 \text{ u}^3$ .

a) El volumen del tetraedro que forman debe ser igual a cero.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ 3 & b & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6a - ab + 3 = 0 \rightarrow a(6 - b) + 3 = 0 \text{ u}^3 \rightarrow \begin{cases} b \neq 6 \\ a = \frac{-3}{6-b} \end{cases}$$

$$b) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & b & 0 \end{vmatrix} = 10 \text{ u}^3$$

$$3 \cdot (6 - b) + 3 = 10 \rightarrow b = \frac{11}{3}$$

**5** Calcula el valor de  $m$  de modo que el área del triángulo determinado por los vectores  $\vec{a}(2, -1, 4)$  y  $\vec{b}(0, 3, m)$  sea igual a  $3\sqrt{5} \text{ u}^2$ .

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{5} \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 6\sqrt{5} \text{ u}^2$$

$$|(2, -1, 4) \times (0, 3, m)| = 6\sqrt{5}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |(-m - 12, -2m, 6)| = \sqrt{(-m - 12)^2 + 4m^2 + 36} = \sqrt{5m^2 + 24m + 180}$$

$$5m^2 + 24m + 180 = (6\sqrt{5})^2 = 180$$

$$5m^2 + 24m = 0 \rightarrow m = -\frac{24}{5}, m = 0$$

**6** Halla un vector de módulo 10 que sea perpendicular a  $(3, -1, 0)$  y forme un ángulo de  $60^\circ$  con  $(0, 0, 1)$ .

Llamamos  $(x, y, z)$  al vector buscado.

- Su módulo es 10  $\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 100$

- Es perpendicular a  $(3, -1, 0) \rightarrow 3x - y = 0$

- Forma un ángulo de  $60^\circ$  con  $(0, 0, 1)$ :

$$\frac{(0, 0, 1) \cdot (x, y, z)}{|(0, 0, 1)| \cdot |(x, y, z)|} = \cos 60^\circ \rightarrow \frac{z}{1 \cdot 10} = \frac{1}{2} \rightarrow 2z = 10 \rightarrow z = 5$$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ 3x - y = 0 \\ z = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ y = 3x \\ z = 5 \end{array}$$

Sustituyendo la 3.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup> ecuación en la 1.<sup>a</sup>:

$$x^2 + 9x^2 + 25 = 100 \rightarrow 10x^2 = 75 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$\text{Soluciones: } \left( \sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5 \right) \text{ y } \left( -\sqrt{\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5 \right)$$

- 7** Sea  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$ . Calcula  $m$  para que los vectores  $\vec{u} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$ ,  $\vec{v} = m\vec{x} + 2\vec{y}$ ,  $\vec{w} = -3\vec{y} + m\vec{z}$  determinen un tetraedro de volumen  $1 \text{ u}^3$ .

Suponemos que la base es ortonormal. El volumen del tetraedro es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & -3 & m \end{vmatrix} = 1 \rightarrow m^2 - m = 6 \rightarrow m = 3, m = -2$$