TEMAS 6 Y 7 – GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS

EJERCICIO 1 : Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ **y es paralelo a** $s:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$.

Solución: Para hallar la ecuación de un plano, necesitamos un punto y dos vectores: P_s, $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$

- Pasamos la recta r a paramétricas para hallar un punto y un vector de r:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\alpha \\ y=\alpha \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r=(1,0,0) \\ v_r=(0,1,1) \end{cases}$$

- Hallamos el vector director de s: $\vec{v}_s\,(3,2,1)$

- Ecuación del plano: $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-1)+3y-3z=0 \Rightarrow -x+3y-3z+1=0$

EJERCICIO 2 : Halla la ecuación del plano que contiene a estas rectas: $r:\begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$

Solución: Hallamos un vector y un punto de cada recta, para ello pasamos r a paramétricas:

Recta r: $\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=2 \end{cases}$ $\quad P_r(1,0,2) \quad \vec{v}_r(-1,1,0)$

Recta s: $P_s(1,0,2) \quad \vec{v}_s(1,-2,1)$

Como no son paralelas tomamos un punto: $P_r(1,0,2)$ y los dos vectores $\vec{v}_r(-1,1,0)$, $\vec{v}_s(1,-2,1)$

La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)+y+(z-2)=0 \Rightarrow x+y+z-3=0$

EJERCICIO 3 : Escribe la ecuación del plano, π, **que contiene al punto** $P\,(3,0,-2)$ **y a la recta** $r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$.

Solución: Necesitamos un punto y dos vectores: P, v_r, PP_r

Recta r: $P_r(3,1,1)$ $\vec{v}_r(2,-1,1)$

Plano: $P(3,0,-2)$, $\vec{v}_r(2,-1,1)$, $\overrightarrow{PP_r}\,(0,1,3) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y & z+2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-3)-6y+2(z+2)=0 \Rightarrow$

$-4x-6y+2z+16=0 \Rightarrow 2x+3y-z-8=0$

<u>EJERCICIO 4</u> : Halla la ecuación del plano, π, que contiene a la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{0}$ y es paralelo a $s: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$.

Solución: Necesitamos un punto y dos vectores: $P_r(1,-2,-1)$, $\vec{v}_r(2,3,0)$, $\vec{PP}_{rs}(-1,2,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7(z+1) = 0 \Rightarrow z + 1 = 0$$

<u>EJERCICIO 5</u> : Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ -2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano π: 5*x* -2*y* + 4*z* - 2 = 0.

Solución: Necesitamos un punto y dos vectores: P_r, $\vec{v}_r$, $\vec{n}_\pi$

Pasamos la recta r a paramétricas: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y + 3x - 4z = -1 \\ x - 3z = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3\alpha - 2 \\ y = 5 - 5\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ $P_r(-2,5,0)$ $\vec{v}_r(3,-5,1)$

La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x+2 & y-5 & z \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ -18(x+2) -7(y-5)+19z = 0 $\Rightarrow$ -18x -7y + 19z -1 = 0

POSICIÓN RELATIVA

<u>EJERCICIO 6</u> : Dados las rectas: $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$; $s: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$; y el plano $\pi: 2x - 3y + 2 = 0$; halla la posición relativa entre: a) *r* y *s* b) *r* y π

Solución:

a) Ponemos las dos rectas en paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda + 3\alpha = -4 \\ \lambda - 2\alpha = 0 \\ \lambda - \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Rango A = 2 $\neq$ Rango A' = 3 $\Rightarrow$ Sistema Incompatible $\Rightarrow$ No tiene solución (Paralelas o se cruzan)

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r$ = (-2, 1, 1), $\vec{v}_s$ = (3, 2, 1) $\Rightarrow$ Los vectores no son paralelos porque no son proporcionales $\Rightarrow$ Las rectas no son paralelas, por tanto, SE CRUZAN.

b) Como la recta ya está en paramétricas, resolvemos el sistema:

2 (3 - 2λ) – 3.(1 + λ) + 2 = 0 $\Rightarrow$ 5 – 7λ = 0 $\Rightarrow$ λ = 5/7 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ SE CORTAN EN UN PUNTO.

<u>EJERCICIO 7</u> : Estudia, según los valores del parámetro *a*, la posición relativa de las rectas *r* y *s*:

$r: \frac{x-a}{-1} = \frac{y-2}{a^3} = \frac{z-a}{a-1}$ y $s: \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases}$ y obtén, si fuese posible, sus puntos de corte.

Solución:
Pasamos las ecuaciones a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = a - \alpha \\ y = 2 + a^3\alpha \\ z = a + (a-1)\alpha \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \alpha = (a+2)\lambda \\ 2 + a^3\alpha = 1 \\ a + (a-1)\alpha = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \alpha = (a+2)\lambda \\ a^3\alpha = -1 \\ (a-1)\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -a-2 & -a \\ a^3 & 0 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a+2 & 1 & a \\ 0 & a^3 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{array}\right) \underset{a\neq 0}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} a+2 & 1 & a \\ 0 & a^3 & -1 \\ 0 & 0 & -a+1 \end{array}\right)$$

Igualamos los elementos de la diagonal, por separado a cero: a = -2, a = 0, a = 1 ⇒ Cuatro casos

Caso I: a = -2 $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible ⇒ Paralelas o se cruzan

$\vec{v}_r = (-1, -8, 3)$, $\vec{v}_s = (0, 0, 0)$ s no es una recta sino un punto.

Caso II: a = 0 $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible ⇒ Paralelas o se cruzan

$\vec{v}_r = (-1, 0, -1)$, $\vec{v}_s = (2, 0, 0)$ No son paralelos ⇒ SE CRUZAN

Caso III: a = 1 $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. $\alpha = -1$, $\lambda = 2/3$ ⇒ SE CORTAN EN UN PUNTO (2,1,1)

Caso IV: $a \in R - \{0,1,-2\}$ Sistema incompatible ⇒ Paralelas o se cruzan:

$\vec{v}_r(-1, a^3, a-1)$ $\vec{v}_s(a+2, 0, 0)$ $\dfrac{-1}{a+2} = \dfrac{a^3}{0} = \dfrac{a-1}{0} \Rightarrow (a-1)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$ No puede ser ⇒ SE CRUZAN

<u>SOLUCIÓN</u>

Si a = -2. s no es una recta sino un punto

Si a = 1: Se cortan en el punto (2,1,1)

Si $a \in R - \{1,-2\}$Se cruzan

<u>EJERCICIO 8</u> : Calcula el valor de *a* para que las rectas: $r: \begin{cases} 2x + z = a \\ y = 1 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + y = a \end{cases}$ **se corten en un punto, y halla el punto de corte.**

Solución:
Pasamos la rectas a paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = a - 2\alpha \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = a - \beta \\ y = \beta \\ z = \dfrac{5 + a - 3\beta}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \beta = 1 \\ 4\alpha - 3\beta = a - 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & a-5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -3a-5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3a+2 \end{array}\right)$$

Igualamos, por separado, los elementos de la diagonal a cero: -3a + 2= 0 ⇒ a = 2/3 ⇒ Dos casos

Caso I : Si a = 2/3 ⇒ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Sistema compatible determinado. Existe una única solución ⇒

$\beta = 1$, $\alpha = -1/3$ ⇒ SE CORTAN EN UN PUNTO P(-1/3,1,4/3)

Caso II : Si a ≠ 2/3 ⇒ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$ ⇒ Sistema Incompatible ⇒ Paralelas o se cruzan

EJERCICIO 9 : Estudia la posición relativa de estas rectas: $\mathbf{r: \begin{cases} x = 1-3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+4\lambda \end{cases}}$ $\mathbf{s: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}}$

Solución:

Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$r: \begin{cases} x = 1-3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+4\lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = -1+3\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases}$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$ ⇒ Sistema Incompatible. No existe solución ⇒ Paralelas o se cruzan

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r(-3,2,4)$ $\vec{v}\ v_s(3,1.4)$ No son paralelos ⇒ SE CRUZAN

EJERCICIO 10

a) Calcula el valor de *m* para que las siguientes rectas sean coplanarias:

$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = m+\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}}$ $\boldsymbol{s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}}$

b) ¿Cuál será la posición relativa de *r* y *s* para ese valor de *m*?

Solución:

a) Para que sean coplanarias no se deben cruzar. Estudiamos su posición relativa (pasamos s a paramétricas y resolvemos el sistema)

$r: \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = m+\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -\alpha \\ z = -2+3\alpha \end{cases}$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -m \\ 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -m-2 \\ 0 & -5 & -8 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -m-2 \end{array}\right)$

Igualamos, por separado, los elementos de la diagonal a cero: -m – 2 = 0 ⇒ m = -2

Caso I : m = -2 ⇒ Sistema compatible determinado. Existe una solución. Se cortan en un punto.

Caso II : m ≠ -2 ⇒ Sistema incompatible ⇒ Paralelas o se cruzan.

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r(-1,1,2)$ $\vec{v}_s(1,-1,3)$ No paralelos ⇒ Se cruzan

Por tanto: m = -2

b) Para m = -2 ⇒ Las rectas se cortan en un punto ⇒ SECANTES

EJERCICIO 11

a) Halla los valores de *m* y *n* para que los siguientes planos sean paralelos:

π_1: 2*x* - *y* + *z* - 5 = 0 y π_2: *mx* + *ny* + 2*z* + 3 = 0

b) Obtén la ecuación de un plano paralelo a π_1 que pase por el punto *A*(3, -2, 1).

Solución:

a) Si π_1 y π_2 han de ser paralelos, se tiene que: $\frac{m}{2} = \frac{n}{-1} = \frac{2}{1} \rightarrow m = 4,\ n = -2$

b) El plano buscado ha de ser de la forma: 2*x* - *y* + *z* + *D* = 0

Si contiene al punto *A*, debe verificarse: 2 · 3 –(–2) + 1 + *D* = 0 ⇒ *D* = - 9 ⇒ 2x –y + z – 9 = 0

EJERCICIO 12 : Determina, en función de *a*, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left.\begin{aligned}(a-2)x+y-z&=-1\\ -ax+(2a-1)y+(-a+2)z&=a\\ -x+ay+z&=a\end{aligned}\right\}$$

Solución:

Estudiamos la posición relativa resolviendo el sistema (por determinantes)

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1 \\ -a & 2a-1 & -a+2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3-a^2-a+1=(a-1)^2\cdot(a+1)=0 \Rightarrow a=1,\ a=-1 \Rightarrow 3 \text{ casos}$$

CASO I: $a = 1$: $\left.\begin{aligned}-x+y-z&=1\\ -x+y+z&=1\\ -x+y+z&=1\end{aligned}\right\}$ Tenemos dos planos coincidentes ($2^{\underline{o}}$ y $3^{\underline{o}}$) y el otro ($1^{\underline{o}}$) los corta.

CASO II: $a = -1$: $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3^{a})+(1^{a})]{(2^{a})+3\cdot(1^{a})} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ -8 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Los tres planos se cortan en una recta.

CASO III: $a \neq 1$ y $a \neq -1$: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto.

EJERCICIO 13 : Dados los planos: π: $4x + my + mz = 6$ y σ: $mx + y + z + 3 = 0$ estudia su posición relativa según los valores de *m*.

Solución:

Las ecuaciones de los planos son: $\left.\begin{aligned}4x+my+mz&=6\\ mx+y+z&=-3\end{aligned}\right\}$

- Los coeficientes de las incognitas son proporcionales si $m = 2$.

En tal caso, las ecuaciones son: $\left.\begin{aligned}4x+2y+2z&=6\\ 2x+y+z&=-3\end{aligned}\right\}$

Los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.

- Si $m \neq 2$, los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.

EJERCICIO 14 : Halla la posición relativa de los siguientes planos según el valor del parámetro *a*:

$$\pi_1: \begin{cases} x = 3-\lambda+2\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=1+2\mu \end{cases} \qquad \pi_2: 4x + ay - 2z = 5$$

Solución:

π_1, expresado de forma implícita, es: $\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 5$

Así, tenemos el sistema: $\left.\begin{aligned}2x+2y-z&=5\\ 4x+ay-2z&=5\end{aligned}\right\}$

- Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales si $a = 4$.

En tal caso, los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.

- Si $a \neq 4$, los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.

ÁNGULOS

EJERCICIO 15 :

Dados las rectas $r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-3\lambda, \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ 4x+y+3z-1=0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi: 4x+y+z-3=0;$ **calcula el ángulo que forman:**

a) ***r* y *s*** **b) *s* y π**

Solución:

a) Hallamos el vector director de s: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-5,-13,11)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{v_r \cdot v_s}{|v_r|\cdot|v_s|} = \dfrac{(1,-3,2).(-5,-13,11)}{\sqrt{1+9+4}.\sqrt{25+169+121}}\dfrac{-5+39+22}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{315}} = \dfrac{56}{\sqrt{4\,410}} \approx 0{,}843 \quad \to \quad \alpha = 32^o\ 30'\ 45''$

b) $\text{sen}\alpha = \dfrac{|v_S \cdot \vec{n}_\pi|}{|v_S|\cdot|\vec{n}\pi|} = \dfrac{|(-5,-13,11).(4,1,1)}{\sqrt{25+169+121}\sqrt{16+1+1}}\dfrac{|-20-13+11|}{\sqrt{315}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{22}{\sqrt{5\,670}} \approx 0{,}292 \quad \to \alpha = 16^o\ 59'\ 16''$

EJERCICIO 16 : Considera los planos π: 2*x* + *ay* + 4*z* - 1 = 0 y σ: *ax* + 2*y* + 4*z* - 3 = 0.

a) Calcula el ángulo que forman π y σ cuando *a* = 1.

b) Halla *a* para que π y σ sean paralelos.

c) Determina el valor de *a* para que σ y σ sean perpendiculares.

Solución:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$ Un vector normal a π es $\vec{n}_1(2,\ 1,\ 4)$. Un vector normal a σ es $\vec{n}_2(1,\ 2,\ 4)$.

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \dfrac{2+2+16}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{20}{21} \approx 0{,}952 \quad \to \quad \alpha = 17^o\ 45'\ 10''$

b) Sus vectores normales han de ser proporcionales: $\dfrac{2}{a} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{4}{4} \quad \to \quad a = 2$

c) Sus vectores normales han de ser perpendiculares: (2,*a*,4)·(*a*,2,4) = 2*a* + 2*a* + 16 = 4*a* + 16 = 0 ⇒ *a* = -4

EJERCICIO 17 : Dados las rectas $r:\begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$ **y** $s:\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$ **y el punto** $P(1,\ 0,\ -5)$; **calcula el ángulo que forma la recta *r* con el plano, π, perpendicular a *s* que pasa por *P*.**

Solución: $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|}$

- Un vector dirección de *r* es: $\vec{d}_r = (2,\ -3,\ 1)\times(-3,\ 2,\ 2) = (-8,\ -7,\ -5)\ //\ (8,\ 7,\ 5) = \vec{d}$

- Un vector normal al plano π es: $\vec{n} = \vec{d}_S = (-2,\ 1,\ 2)$

$\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{-16+7+10}{\sqrt{138}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3\sqrt{138}} \approx 0{,}028 \quad \to \alpha = 1^o\ 37'\ 34''$

DISTANCIAS

<u>EJERCICIO 18</u> : Calcula la distancia entre las rectas: $r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-2}$ **y** $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

Solución: $\text{dist}(r,\ s) = \dfrac{|\,[v_r,\ v_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}]\,|}{|\,v_r \times v_s\,|}$

Buscamos un punto y un vector dirección de cada recta:

Recta r: Punto: P_r (2,-1,0) Vector: $\vec{v}_r$ (1,3,-2)

Recta s: Punto: P_s (1,0,-1) Vector: $\vec{v}_s$ (1,2,1)

$$\overrightarrow{P_rP_s}(-1, 1, -1) \Rightarrow \left[v_r,\ v_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7i - 3j - k = (7, -3, -1)$$

$$\text{dist}(r,\ s) = \frac{|\,[v_r,\ v_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}]\,|}{|\,v_r \times v_s\,|} = \frac{|-9|}{\sqrt{49+9+1}} = \frac{9}{\sqrt{59}} \approx 1{,}17u$$

<u>EJERCICIO 19</u> : Calcula la distancia entre las rectas: $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z+1}{0}$ **y** $s: \begin{cases} x = -5 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$

Solución: $\text{dist}(r,\ s) = \dfrac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\ v_r,\ v_s]|}{|\ v_r \times v_s|}$

- En la recta r: $P_r(-1,\ 2,\ -1)$; $v_r(3,\ 4,\ 0)$
- En la recta s: $P_s(-5,\ 2,\ 3)$; $v_s(1,\ -1,\ 4)$
- $\overrightarrow{P_rP_s}(-4,\ 0,\ 4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{P_rP_s},\ v_r,\ v_s\right] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -92$
- $|\ v_r \times v_s| = |\ (3,\ 4,\ 0) \times (1,\ -1,\ 4)| = |\ (16,\ -12,\ -7)| = \sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-7)^2} = \sqrt{449}$

Por tanto: $\text{dist}(r,\ s) = \dfrac{92}{\sqrt{449}} \approx 4{,}34$

<u>EJERCICIO 20</u> : Dados el punto $P(2,\ 0,\ -3)$, la recta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 2y + 2z - 1 = 0$,

calcula la distancia entre: a) *P* y π b) *P* y *r*

Solución:

a) $dist(P,\ \pi) = \dfrac{|2+0-6-1|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$

b) dist (P,r) = $\dfrac{|\overrightarrow{P_rP} \times v_r|}{|v_r|}$

- Hallamos un punto y un vector dirección de la recta *r* : $P_r(2,\ -3,\ 2)$; $v_r(1,\ 1,\ -2)$
- $\left|\overrightarrow{P_rP} \times v_r\right| = |\ (0,\ 3,\ -5) \times (1,\ 1,\ -2)| = |\ (-1,\ -5,\ -3)| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$
- $|\ v_r| = |\ (1,\ 1,\ -2)| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ $\Rightarrow$ Por tanto: $\text{dist}(P,\ r) = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{6}} \approx 2{,}42$

EJERCICIO 21 : Calcula la distancia del punto $P(3,\ 1,\ -2)$ a la recta $r: \begin{cases} x-2y-z+5=0 \\ 2x+3y+z+1=0 \end{cases}$.

Solución: dist (P,r) = $\dfrac{|P_rPxv_r|}{|v_r|}$

- Hallamos un punto y un vector de r (pasamos la recta a paramétricas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 3 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y=\alpha \\ z=\dfrac{9-7\alpha}{3} \\ x=\dfrac{-6-\alpha}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-6-\alpha}{3} \\ y=\alpha \\ z=\dfrac{9-7\alpha}{3} \end{cases}$$

Punto (-2,0,3) Vector (-1/3,1,-7/3)||(-1,3,-7)

$$\left|\overrightarrow{P_rP}\times dv_r\right| = |(5,\ 1,\ -5)\times(-1,\ 3,-7)| = |(8,\ 40,\ 16)| = \sqrt{1\,920} \qquad |dv_r| = |(-1,3,-7)| = \sqrt{59}$$

Por tanto: $\text{dist}(P,\ r) = \dfrac{\sqrt{1\,920}}{\sqrt{59}} \approx 5{,}70$

EJERCICIO 22 : Halla la distancia de la recta $r: \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$ al plano $\pi: 2x+y=4$.

Solución: d(r,π) = d(P_r,π)

P_r (-1,2,3)   π: 2x + y – 4 = 0

d(r,π) = d(P_r, π) = $\dfrac{|2.(-1)+2-4|}{\sqrt{4+1+0}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}79$ u

LUGARES GEOMÉTRICOS

EJERCICIO 23 : Halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, tales que la distancia de *P* a *A* sea igual al triple de la distancia de *P* a *B*, siendo *A* ˜(1, 0, 0) y *B* (1, 0, 0).

Solución:

Si *P*(*x*, *y*, *z*) es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, *A*) = 3 *dist* (*P*, *B*), es decir:

$\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2} = 3\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 9\,[(x-1)^2 + y^2 + z^2]$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 = 9\,[x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2] \Rightarrow 8x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 20x + 8 = 0$

EJERCICIO 24 : Obtén el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos π: 3*x* - 2*y* + 4*z* - 1 = 0 y σ: 4*x* + 2*y* - 3*z* + 2 = 0.

Solución: Si *P* (*x*, *y*, *z*) es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, π) □ *dist* (*P*, →), es decir:

$\dfrac{|3x-2y+4z-1|}{\sqrt{29}} = \dfrac{|4x+2y-3z+2|}{\sqrt{29}} \Rightarrow |3x - 2y + 4z - 1| = |4x + 2y - 3z + 2| \Rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x-2y+4z-1=4x+2y-3z+2 \ \rightarrow\ x+4y-7z+3=0 \\ 3x-2y+4z-1=-4x-2y+3z-2 \ \rightarrow\ 7x+z+1=0 \end{cases}$$

EJERCICIO 25 : Dados los puntos *A* (-1, 0) y *B* (1, 0), halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, del plano tales que el cociente de distancias: $\dfrac{\text{dist}(P,\ A)}{\text{dist}(P,\ B)}$ sea igual a 1. Identifica la figura resultante.

Solución: Si *P* (*x*, *y*) es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$\dfrac{\text{dist}(P,\ A)}{\text{dist}(P,\ B)} = 1 \ \rightarrow\ \text{dist}(P,\ A) = \text{dist}(P,\ B) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \ \rightarrow\ (x+1)^2+y^2 = (x-1)^2+y^2$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$

Es la ecuación del eje *Y*, que en este caso es la mediatriz del segmento *AB*.

EJERCICIO 26 : Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de *A* (2, 1, -5) y *B* (6, 0, 3). ¿Qué figura obtienes?

Solución: Si *P* (*x*, *y*, *z*) es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, *A*) = *dist* (*P*, *B*)

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2}=\sqrt{(x-6)^2+y^2+(z-3)^2}$$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 10z + 25 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + z^2 - 6z + 9 \Rightarrow 8x - 2y + 16z - 15 = 0$

Es el plano mediador del segmento AB (es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio de *AB*).

REPASO

EJERCICIO 27 : Halla la posición relativa de las siguientes rectas y escribe la ecuación del plano que las contiene: $\mathbf{r:\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=3\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases}}$ $\qquad \mathbf{s:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z}{-2}}$

Solución:

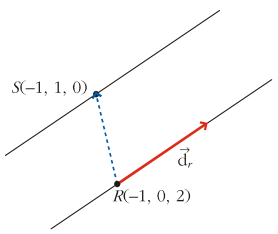
- Posición relativa de las rectas : Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r:\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=3\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases};\quad s:\begin{cases}x=-1+4\alpha\\ y=1+6\alpha\\ z=-2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\lambda-4\alpha=0\\ 3\lambda-6\alpha=1\\ -\lambda+2\alpha=-2\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\-1&-2&-2\\3&-6&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&-1\\0&-4&-2\\0&0&1\end{array}\right)$$

Rango A = 2 $\neq$ Rango A* = 3 $\Rightarrow$ Sistema Incompatible. No existe solución: Paralelas o se cruzan.

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r = (2, 3, -1)$, $\vec{v}_s = (4, 6, -2)$ $\Rightarrow$ Los vectores son paralelos porque son proporcionales $\Rightarrow$ Las rectas son PARALELAS

- Ecuación del plano que las contiene : Necesitamos un punto y dos vectores: P_r, v_r, P_rP_s



Recta r: P_r (-1,0,2)

Recta s: P_s(-1,1,0) $\qquad v_r = (2,3,-1)$

$P_rP_s = (0,1,-2)$

Ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix}x+1&y-0&z-2\\2&3&-1\\0&1&-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow -5(x+1)+4y+2(z-2)=0\Rightarrow -5x+4y+2z-9=0$$

EJERCICIO 28

a) Escribe la ecuación del plano, π, perpendicular a la recta $r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, que pase por *P* (1, 2, -1).

b) Calcula la distancia del punto *P* a la recta *r*.

Solución:

a) Un vector normal al plano será el vector dirección de la recta *r* : $v_r = \vec{n}_\pi = (2,-2,1)$

La ecuación del plano será: 2x – 2y + z + D = 0

Sustituimos el punto P(1,2,-1) y obtenemos D: 2 - 4 – 1 + D = 0 $\Rightarrow$ D = 3

Solución: π: $2x - 2y + z + 3 = 0$

b) $d(P,r) = \dfrac{|PP_r x v_r|}{|v_r|}$

Hallamos un punto y un vector de r: $P_r(2,-1,1)$ $\quad v_r(2,-2,1)$

Hallamos $PP_r = (1,-3,2)$

$$PP_r\ x\ v_r=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-3&2\\2&-2&1\end{vmatrix}=i+3j+4k=(1,3,4)\Rightarrow d(P,r)=\frac{|PP_r x v_r|}{|v_r|}=\frac{\sqrt{1+9+16}}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{\sqrt{26}}{3}\approx 1{,}7u$$

<u>EJERCICIO 29</u>
a) Calcula el valor de *m* para que los puntos *P*(1, 2, -1), *Q*(0, -1, 2), *R*(3, 1, -1) y *S*(*m*, 2, 1) sean coplanarios, y escribe la ecuación del plano que los contiene.
b) Obtén un punto simétrico de *A*(1, -1, 1) respecto del plano anterior.

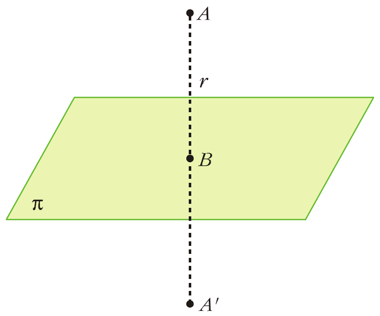
Solución:
a) Escribimos la ecuación del plano, π, que contiene a los puntos *P*(1, 2, -1), *Q*(0, -1, 2) y *R*(3, 1, -1):

$$P(1,2,-1),\ \overrightarrow{PQ}(-1,-3,3),\ \overrightarrow{PR}(2,-1,0) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-1)+6(y-2)+7(z+1)=0$$

$$3x + 6y + 7z - 8 = 0$$

Hallamos el valor de *m* para que *S*(*m*, 2, 1) $\in \pi$: $3m + 12 + 7 - 8 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-11}{3}$

b) (1) Obtenemos la recta, *r*, que pasa por *A* y es perpendicular a π: $r: \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -1+6\lambda \\ z = 1+7\lambda \end{cases}$



(2) Buscamos el punto, *B*, de intersección de *r* y π:
$3(1 + 3\lambda) + 6(-1 + 6\lambda) + 7(1 + 7\lambda) - 8 = 0$

$$94\lambda = 4 \quad \to \quad \lambda = \frac{4}{94} = \frac{2}{47} \quad \to \quad B\left(\frac{53}{47}, \frac{-35}{47}, \frac{61}{47}\right)$$

(3) Si *A*'(*x*, *y*, *z*) es el simétrico de *A* respecto de A´, *B* es el punto medio de *AA*': $\left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y-1}{2}, \dfrac{z+1}{2}\right) = \left(\dfrac{53}{47}, \dfrac{-35}{47}, \dfrac{61}{47}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{53}{47} \quad \to \quad x = \dfrac{59}{47} \\ \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{-35}{47} \quad \to \quad y = \dfrac{-23}{47} \\ \dfrac{z+1}{2} = \dfrac{61}{47} \quad \to \quad z = \dfrac{75}{47} \end{array}\right\} \to A'\left(\frac{59}{47}, \frac{-23}{47}, \frac{75}{47}\right)$$

<u>EJERCICIO 30</u> : Halla la ecuación de la perpendicular común a las rectas:

$$\boldsymbol{r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}} \qquad \textbf{y} \qquad \boldsymbol{s: \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}}$$

Solución:
- Un punto genérico de *r* es *R*(-1 + μ, 2 + 2μ, 3 - μ).
- Un punto genérico de *s* es *S*(1 + λ, -2 + λ, 3 + λ).

Un vector genérico de origen en *r* y extremo en *s* es: $\overrightarrow{RS}(\lambda - \mu,\ \lambda - 2\mu - 4,\ \lambda + \mu)$
Este vector debe ser perpendicular a *r* y a *s*:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_r = \overrightarrow{RS} \cdot (1,2,-1) = 0 \quad \to \quad 2\lambda - 6\mu - 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_s = \overrightarrow{RS} \cdot (1,1,1) = 0 \quad \to \quad 3\lambda - 2\mu - 4 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{4}{7} \\ \mu = \dfrac{-8}{7} \end{array}$$

$$\text{Así}: \ R\left(\frac{-15}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{29}{7}\right); \quad S\left(\frac{-3}{7}, \frac{-10}{7}, \frac{25}{7}\right)$$

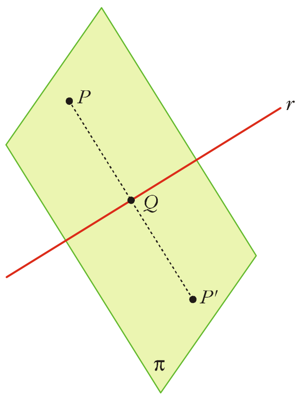
$$\overrightarrow{RS}\left(\frac{12}{7}, \frac{-8}{7}, \frac{-4}{7}\right) \ // \ (3,-2,-1)$$

Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son: $P: \begin{cases} x = \dfrac{-15}{7} + 3\lambda \\ y = \dfrac{-2}{7} - 2\lambda \\ z = \dfrac{29}{7} - \lambda \end{cases}$

<u>EJERCICIO 31</u> : Averigua las coordenadas del punto simétrico de *P*(3, 4, -1) respecto de la recta $r: \begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$; y calcula la distancia de *P* a *r*.

Solución:
(1) Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r:

$$n_\pi = v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-4,-7) \parallel (1,4,7) \Rightarrow x + 4y + 7z + D = 0 \Rightarrow 3 + 16 - 7 + D = 0 \Rightarrow D = -12$$



$\pi: x + 4y + 7z - 12 = 0$

(2) Resolvemos el sistema entre la recta y el plano (Para ello pasamos la recta a paramétricas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} z = \alpha \\ y = \dfrac{3+4\alpha}{7} \\ x = \dfrac{6+8\alpha}{7} - \alpha = \dfrac{6+\alpha}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+\alpha}{7} \\ y = \dfrac{3+4\alpha}{7} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\frac{6+\alpha}{7} + \frac{12+16\alpha}{7} + 7\alpha - 12 = 0 \Rightarrow 6 + \alpha + 12 + 16\alpha + 49\alpha - 84 = 0 \Rightarrow \alpha = 66/66=1$$

Q(1,1,1)

(3) Si llamamos $P'(x, y, z)$ al simétrico de P, entonces Q es el punto medio de PP':

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2} = 1 \;\rightarrow\; x = -1 \\ \dfrac{y+4}{2} = 1 \;\rightarrow\; y = -2 \\ \dfrac{z-1}{2} = 1 \;\rightarrow\; z = 3 \end{array}\right\} P'(-1, -2, 3)$$

- La distancia de P a r es igual a la distancia de P a Q:

$$dist(P, r) = dist(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|(-2, -3, 2)\right| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$$

<u>EJERCICIO 32</u> :

a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ y es perpendicular al plano π: 2*x* + *y* + *z* - 2 = 0.

b) Calcula el ángulo que forman la recta *r* y el plano π.

Solución:
a) Necesitamos un punto y dos vectores: $P_r(1,-2,0)$, $v_r(3,-1,1)$, $n_\pi(2,1,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-1) - (y+2) + 5z = 0 \Rightarrow -2x - y + 5z = 0$$

b) $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{v_r \cdot \vec{n}_\pi}{|v_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \dfrac{(3,-1,1).(2,1,1)}{\sqrt{9+1+1}\sqrt{4+1+1}} \dfrac{6-1+1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{66}} \to \alpha = 47^{o}\ 36'\ 29''$

<u>EJERCICIO 33</u> : Determina la posición relativa de las rectas *r* y *s*, y calcula la mínima distancia entre ellas: $\mathbf{r: \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 3 \\ z = -1+6\lambda \end{cases}}$ $\qquad \mathbf{s: \dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+1}{3}}$

Solución:

a) Posición relativa: Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 3 \\ z = -1+6\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6+\alpha \\ y = -2 \\ z = -1+3\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 6 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible (Paralelas o se cruzan)}$$

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r(2,0,6)$, $\vec{v}_s(1,0,3) \Rightarrow$ Proporcionales $\Rightarrow$ Son paralelas.

b) Como son paralelas d(r,s) = d(P_r,s) = $\dfrac{|P_rP_s x v_s|}{|v_s|}$

$P_r(2,3,-1)$, $P_s(6,-2,-1)$, $\vec{v}_s(1,0,3) \Rightarrow P_rP_s = (4,-5,0)$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times v_s|}{|v_s|} = \frac{|(4,-5,\ 0) \times (1,\ 0,\ 3)|}{|(1,\ 0,\ 3)|} = \frac{|(-15,-12,5)|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{394}}{\sqrt{10}} \approx 6{,}28$$

<u>EJERCICIO 34</u> : El plano π: 2*x* + *y* + 4*z* + 8 = 0 corta a los ejes coordenados en tres puntos; *A*, *B* y *C*. Halla el área del triángulo con vértices en esos tres puntos.

Solución:

Obtenemos los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados:

- Con el eje *X* : *y* = *z* = 0 ⇒ *x* = -4 ⇒ Punto *A* (-4, 0, 0)
- Con el eje *Y* : *x* = *z* = 0 ⇒ *y* = -8 ⇒ Punto *B* (0, -8, 0)
- Con el eje *Z* : *x* = *y* = 0 ⇒ *z* = -2 ⇒ Punto *C* (0, 0, -2)

$\overrightarrow{AB}(4,-8,0);\ \overrightarrow{AC}(4,0,-2)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(16,\ 8,\ 32)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2+8^2+32^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1\,344} \approx 18{,}33\ u^2$$

<u>EJERCICIO 35</u> :

a) Escribe la ecuación del plano, π, que pasa por los puntos *P* (2, 1, -1), *Q* (1, 0, 3) y *R* (-3, 1, 1).
b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Solución:

a) Necesitamos un punto P(2,1,-1) y dos vectores PQ(-1,-1,4), PR(-5,0,2)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-2) - 18(y-1) - 5(z+1) = 0 \Rightarrow -2x - 18y - 5z + 17 = 0$$

b) Hallamos los puntos de corte de □ con los ejes coordenados:

$$-\text{ Con el eje } X \ \to\ y = z = 0 \ \to\ x = \frac{17}{2} \ \to\ \text{Punto } A\left(\frac{17}{2},\ 0,\ 0\right)$$

$$-\text{ Con el eje } Y \ \to\ x = z = 0 \ \to\ y = \frac{17}{18} \ \to\ \text{Punto } B\left(0,\ \frac{17}{18},\ 0\right)$$

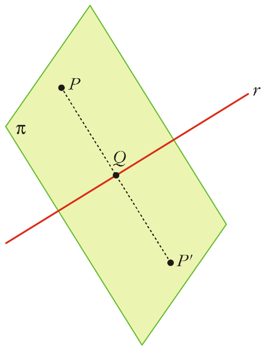
$$-\text{ Con el eje } Z \ \to\ x = y = 0 \ \to\ z = \frac{17}{5} \ \to\ \text{Punto } C\left(0,\ 0,\ \frac{17}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{17}{2},\ \frac{17}{18},\ 0\right);\ \overrightarrow{AC}\left(-\frac{17}{2},\ 0,\ \frac{17}{5}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{289}{90}, \frac{289}{10}, \frac{289}{36}\right)\right| \approx 15{,}08\ \text{u}^2$$

<u>EJERCICIO 36</u> : Halla el punto simétrico de $P(-2,\ 1,\ 5)$ respecto a la recta $r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Solución:



[1] Hallamos la ecuación del plano, π, que pasa por P y es perpendicular a r:
x – 2y + z + D = 0 $\Rightarrow$ -2 -2 + 5 + D = 0 $\Rightarrow$ D = -1 $\Rightarrow$ x – 2y + z – 1 = 0

[2] Hallamos el punto, Q, de intersección de r y π:

$$r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \qquad \begin{aligned} &(2+\lambda) - 2(-3-2\lambda) + (1+\lambda) - 1 = 0 \\ &2+\lambda+6+4\lambda+1+\lambda-1 = 0 \\ &6\lambda + 8 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} \end{aligned} \qquad \Rightarrow Q\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

[3] El punto Q es el punto medio de PP', siendo P' el simétrico de P respecto a r: Si $P'(x, y, z)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x-2}{2} = \frac{2}{3} \ \rightarrow\ x = \frac{10}{3} \\ &\frac{y+1}{2} = \frac{-1}{3} \ \rightarrow\ y = \frac{-5}{3} \\ &\frac{z+5}{2} = \frac{-1}{3} \ \rightarrow\ z = \frac{-17}{3} \end{aligned}\right\} P'\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-17}{3}\right)$$

<u>EJERCICIO 37</u> : Determina la posición relativa de las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2};$$ **y halla la ecuación de la perpendicular común.**

Solución:
- Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = -2+3\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = 1+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & -5 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 36 \end{array}\right)$$

Rango A = 2 $\neq$ Rango A* = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible $\Rightarrow$ Se cruzan o son paralelas

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r$ (-1,2,1) $\vec{v}_s$(3,1,2) $\Rightarrow$ No son proporcionales $\Rightarrow$ SE CRUZAN
- Perpendicular común:
Un punto genérico de r es $P_r(2 - \lambda,\ 3 + 2\lambda, -1 + \lambda)$.
Un punto genérico de s es $P_s(-2 + 3\alpha,\ 1 + \alpha,\ 1 + 2\alpha)$
El vector $P_rP_s = (-4 + 3\alpha + \lambda,\ -2 + \alpha - 2\lambda,\ 2 + 2\alpha - \lambda)$ es perpendicular a v_r y a v_s :

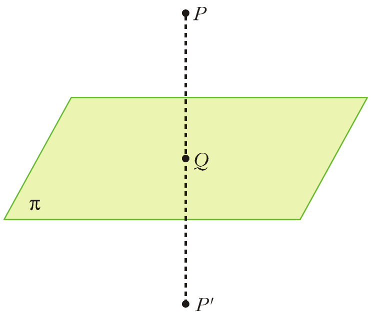
$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{RS}\cdot \vec{d}_r = 0 \ \rightarrow\ -6\lambda + \mu + 2 = 0 \\ &\overrightarrow{RS}\cdot \vec{d}_s = 0 \ \rightarrow\ -\lambda + 14\mu - 10 = 0 \end{aligned}\right\} \lambda = \frac{38}{83};\ \mu = \frac{62}{83}$$

$$\text{Así}: P_r\left(\frac{128}{83}, \frac{325}{83}, \frac{-45}{83}\right);\ P_s\left(\frac{20}{83}, \frac{145}{83}, \frac{207}{83}\right) \Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s}\left(\frac{-108}{83}, \frac{-180}{83}, \frac{252}{83}\right) \ //\ (3,\ 5,\ -7)$$

Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son: $p: \begin{cases} x = \dfrac{128}{83} + 3\lambda \\ y = \dfrac{325}{83} + 5\lambda \\ z = \dfrac{-45}{83} - 7\lambda \end{cases}$

EJERCICIO 38 : Obtén el punto simétrico de *P* (2, -1, 3) respecto al plano π: 3*x* + 2*y* + *z* - 5 = 0.

Solución:



[1] Hallamos la ecuación de la recta, *r*, que pasa por *P* y es perpendicular a π: $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

[2] Obtenemos el punto, *Q*, de intersección de *r* y π:
3 (2 + 3λ) + 2(-1 + λ) + (3 + λ) – 5 = 0 ⇒

$6 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 3 + \lambda - 5 = 0 \quad \to \quad 14\lambda + 2 = 0 \quad \to \quad \lambda = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow$

$Q\left(\dfrac{11}{7}, -\dfrac{9}{7}, \dfrac{20}{7}\right)$

[3] Si llamamos *P* ' al simétrico de *P* respecto de π, *Q* es el punto medio de *PP'*:*P'* (*x*, *y*, *z*)

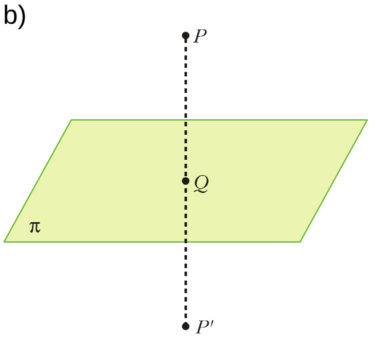
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{11}{7} \quad \to \quad x = \dfrac{8}{7} \\ \dfrac{y-1}{2} = -\dfrac{9}{7} \quad \to \quad y = -\dfrac{11}{7} \\ \dfrac{z+3}{2} = \dfrac{20}{7} \quad \to \quad z = \dfrac{19}{7} \end{array}\right\} P'\left(\dfrac{8}{7}, -\dfrac{11}{7}, \dfrac{19}{7}\right)$$

EJERCICIO 39 : Dados el punto *P* (3, 1, -1) y el plano π: 3*x* - *y* - *z* = 2, calcula:
a) La ecuación de la recta que pasa por *P* y es perpendicular a π.
b) El punto simétrico de *P* respecto a π.
c) Ecuación del plano que pasa por *P* y es paralelo a π.

Solución:

a) $r: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

b)



[1] Apartado a)

[2] Hallamos el punto, *Q*, de intersección de *r* y π:
3 (3 + 3λ) - (1 - λ) -(-1 - λ) = 2 ⇒ 9 + 9λ - 1 + λ + 1 + λ = 2 ⇒

$11\lambda = -7 \quad \to \quad \lambda = -\dfrac{7}{11} \Rightarrow Q\left(\dfrac{12}{11}, \dfrac{18}{11}, \dfrac{-4}{11}\right)$

[3] Si *P'* (*x*, *y*, *z*) es el simétrico de *P* respecto a □, *Q* es el punto medio de *PP'*:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{12}{11} \;\rightarrow\; x=-\dfrac{9}{11} \\[2ex] \dfrac{y+1}{2}=\dfrac{18}{11} \;\rightarrow\; y=\dfrac{25}{11} \\[2ex] \dfrac{z-1}{2}=\dfrac{-4}{11} \;\rightarrow\; z=\dfrac{3}{11} \end{array}\right\} P'\left(\dfrac{-9}{11},\dfrac{25}{11},\dfrac{3}{11}\right)$$

c) Un plano paralelo a π es de la forma 3x – y – z + D = 0

Como pasa por P(3, 1, -1) $\Rightarrow$ 9 – 1 + 1 + D = 0 $\Rightarrow$ D = -9 $\Rightarrow$ 3x – y – z – 9 = 0

<u>EJERCICIO 40</u> : Dadas las rectas: $\mathbf{r:\begin{cases} x-az=2 \\ y-z=-3 \end{cases}}$ **y** $\mathbf{s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{b}=\dfrac{z}{1}}$**,**

calcula *a* y *b* para que sean ortogonales y coplanarias.

Solución:

Escribimos la recta *r* en paramétricas: $r:\begin{cases} x=2+a\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ $\quad P_r(2,\,-3,\,0);\;\; dv_r(a,\,1,\,1)$ $\quad P_S(1,\,-1,\,0);\;\; dv_S(2,\,b,\,1)$

- Para que sean ortogonales, ha de ser: $v_r\cdot v_S=0 \;\rightarrow\; 2a+b+1=0$

- Para que sean coplanarias: $\left[\overrightarrow{P_rP_S},\,v_r,\,v_S\right]=0 \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix}=-2a+b+3=0$

Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que: $\left.\begin{array}{r} 2a+b+1=0 \\ -2a+b+3=0 \end{array}\right\}\; \begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-2 \end{array}$

<u>EJERCICIO 41</u> : Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta

$\mathbf{r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\quad -2\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}}$ **y otro sobre** $\mathbf{s:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-2}}$ **Calcula el área del cuadrado.**

Solución:

$v_r=(1,\,-2,\,-1)\;\;//\;\;v_S=(2,\,-4,\,-2)$. Por tanto las dos rectas son paralelas.

El lado del cuadrado es la distancia entre *r* y *s*.

$$\text{dist}(r,\,s)=\text{dist}(P_r,\,s)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP_S}\times dv_S\right|}{|v_S|}=\frac{|(-10,\,-4,\,-2)|}{\sqrt{4+16+4}}=\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{24}}=\sqrt{5}=\text{lado del cuadrado}$$

Por tanto, $\text{Área}=\left(\sqrt{5}\right)^2=5\text{ u}^2$

<u>EJERCICIO 42</u> : Halla la ecuación de la recta *s* que pasa por *P*(2, 0, 1) y corta perpendicularmente a la recta $\mathbf{r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}}$**.**

Solución:

[1] Hallamos el plano, π, perpendicular a r que pasa por P: 2x – y + 2z + D = 0 $\Rightarrow$ 4 + 2 + D = 0 $\Rightarrow$ D = -6

2x – y + 2z – 6 = 0

[2] Hallamos el punto Q de intersección entre r y π: 2(2α + 2) – (-α+1) + 2(2α) – 6 = 0 $\Rightarrow$ 9α - 3 = 0 $\Rightarrow$

α = 1/3 $\Rightarrow$ Q ($\left(\dfrac{2}{3}+2,-\dfrac{1}{3}+1,\dfrac{2}{3}\right)=\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

[3] La recta pedida pasa por P y Q $\Rightarrow \begin{cases} \text{Punto}: P(2,0,1) \\ \text{Vector}: v = PQ = \left(\frac{8}{3}-2, \frac{2}{3}-0, \frac{2}{3}-1\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \parallel (2,2,-1) \end{cases}$

Así: $s: \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = \quad +2\lambda \\ z = 1 \quad -\lambda \end{cases}$

EJERCICIO 43 : Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de ecuación $2x - y + z + 4 = 0$ y que dista 10 unidades del punto $P(2, 0, 1)$.

Solución:

Un plano paralelo a $2x - y + z + 4 = 0$ es de la forma: π: $2x - y + z + D = 0$

Tenemos que hallar D para que la distancia a P sea 10 u: $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 2+1+D|}{\sqrt{4+1+1}} = 10$

$|5+D| = 10\sqrt{6} \begin{cases} 5+D = 10\sqrt{6} \quad \rightarrow \quad D = 10\sqrt{6}-5 \\ -5-D = 10\sqrt{6} \quad \rightarrow \quad D = -5-10\sqrt{6} \end{cases}$

Hay dos planos:

$2x - y + z + 10\sqrt{6} - 5 = 0$

$2x - y + z - 10\sqrt{6} - 5 = 0$

EJERCICIO 44 : Halla la ecuación de la proyección ortogonal, r', de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ sobre el plano π: $x - y + z + 2 = 0$.

Solución:

[1] Hallamos el puntode corte de la recta r y el plano π: $(2\alpha + 1) - (-\alpha) + (\alpha - 2) + 2 = 0 \Rightarrow 4\alpha + 1 = 0$

$\alpha = -1/4 \Rightarrow P_1(1/2, 1/4, -9/4)$

[2] Hallamos otro punto cualquiera de r: $\alpha = 0$ $P_r(1,0,-2)$

[3] Calculamos la recta perpendicular a π que pase por r: $s \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2+\lambda \end{cases}$

[4] Hallamos el punto P_2 de intersección entre la recta s y el plano π

$(1 + \lambda) - (-\lambda) + (-2 + \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/3 \Rightarrow P_2(2/3,1/3,-7/3)$

[5] La recta pedida es la que pasa por P_1 y $P_2 \Rightarrow r'$: $\begin{cases} \text{Punto}: P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{9}{4}\right) \\ \text{Vector}: P_1P_2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{12}\right) \parallel (2,1,-1) \end{cases} \Rightarrow r': \begin{cases} x = \frac{1}{2}+2\lambda \\ y = \frac{1}{4}+\lambda \\ z = -\frac{9}{4}-\lambda \end{cases}$