FACTORIZACIÓN Y FRACCIONES ALGEBRAICAS RESUELTAS

EJERCICIO 12 : Factoriza los siguientes polinomios:

a) $\mathbf{x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2}$ **b)** $\mathbf{x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2}$ **c)** $\mathbf{x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x}$

d) $\mathbf{x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x}$ **e)** $\mathbf{x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x}$ **f)** $\mathbf{x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9}$

Solución:

a) $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$

- Sacamos x^2 factor común: $x^2\,(x^3 + 5x^2 - x - 5)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 5x^2 - x - 5$:

	1	5	–1	–5
1		1	6	5
	1	6	5	0
–1		–1	–5	
	1	5	0	

Por tanto: $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2 = x^2\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 5)$

b) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$

- Sacamos x^2 factor común: $x^2\,(x^3 + x^2 - 4x - 4)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + x^2 - 4x - 4$:

	1	1	–4	–4
–1		–1	0	4
	1	0	–4	0
2		2	4	
	1	2	0	

Por tanto: $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 = x^2\,(x + 1)\,(x - 2)\,(x + 2)$

c) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

- Sacamos x factor común: $x\,(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$:

	1	2	–9	–18
3		3	15	18
	1	5	6	0
–3		–3	–6	
	1	2	0	

Por tanto: $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x = x\,(x - 3)\,(x + 3)\,(x + 2)$

d) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común: $x\,(x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 6x^2 - x - 6$:

	1	6	–1	–6
1		1	7	6
	1	7	6	0
–1		–1	–6	
	1	6	0	

Por tanto: $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 6)$

e) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común: $x\,(x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 6x^2 - x - 6$:

	1	6	–1	–6
1		1	7	6
	1	7	6	0
–1		–1	–6	
	1	6	0	

Por tanto: $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 6)$

f) Usamos la regla de Ruffini:

	1	–6	8	6	–9
1		1	–5	3	9
	1	–5	3	9	0
–1		–1	6	–9	
	1	–6	9	0	
3		3	–9		
	1	–3	0		

Luego: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x - 1)\,(x + 1)\,(x - 3)^2$

EJERCICIO 15 : Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - 18x^2$ **b)** $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ **c)** $x^3 - 13x^2 + 36x$

d) $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$ **e)** $x^5 + x^4 - 2x^3$ **e)** $x^3 - 3x + 2$

Solución:

a) Sacamos factor común y tenemos en cuenta que $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$:

$2x^4 - 18x^2 = 2x^2\,(x^2 - 9) = 2x^2\,(x+3)\,(x-3)$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	−1	−1	−1	−2
−1		−1	2	−1	2
	1	−2	1	−2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x+1)\,(x-2)\,(x^2+1)$ (El polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales).

c) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$x^3 - 13x^2 + 36x = x\left(x^2 - 13x + 36\right)$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow x = 9 \\ \searrow x = 4 \end{array}$$

Por tanto: $x^3 - 13x^2 + 36\,x = x\,(x-9)\,(x-4)$

d) Utilizamos la regla de Ruffini:

	2	−9	−8	15
1		2	−7	−15
	2	−7	−15	0
5		10	15	
	2	3	0	

$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = (x-1)\,(x-5)\,(2x+3)$

e) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3\,(x^2 + x - 2)$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Por tanto: $x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3 (x-1)(x+2)$

f) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	0	–3	2
1		1	1	–2
	1	1	–2	0
1		1	2	
	1	2	0	

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 (x+2)$$

EJERCICIO 16 : Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}$ b) $\dfrac{x^2-2x+1}{x+3}:\dfrac{x-1}{x^2-9}$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2}{x^2-x}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}$

a) $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ b) $\dfrac{x^2+x}{2x+4}:\dfrac{x^2-1}{x+2}$

a) $\dfrac{2x+1}{x^2-9}+\dfrac{3}{x+3}$ b) $\dfrac{x^2+2x}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-4}$

a) $\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}-\dfrac{2x}{x+1}$ b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}$

Solución:

a) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x-2x-2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-2x+1}{x+3}:\dfrac{x-1}{x^2-9}=\dfrac{(x-1)^2}{(x+3)}:\dfrac{(x-1)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{(x-1)^2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-1)}==(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2}{x^2-x}=\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}-\dfrac{x^2+2}{x(x-1)}=\dfrac{x^2+x-x^2-2}{x(x-1)}=\dfrac{x-2}{x^2-x}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1}=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

a) $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-4}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2+x-2+x^2+1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-4}$

b) $\dfrac{x^2+x}{2x+4}:\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{x(x+1)}{2(x+2)}:\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}=\dfrac{x(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-1)(x+1)}=\dfrac{x}{2(x-1)}=\dfrac{x}{2x-2}$

a) $\dfrac{2x+1}{x^2-9}+\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2x+1}{(x-3)(x+3)}+\dfrac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{2x+1+3x-9}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{5x-8}{x^2-9}$

b) $\dfrac{x^2+2x}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{x(x+2)}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}$

a) $\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}-\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{3x^2+1}{x(x+1)}-\dfrac{2x^2}{x(x+1)}=\dfrac{3x^2+1-2x^2}{x(x+1)}=\dfrac{x^2+1}{x^2+x}$

b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}\cdot\dfrac{x}{(x+1)}==\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$

EJERCICIO 17 : Calcula y simplifica si es posible:

a) $\frac{2}{x+1}-\frac{x+3}{2x+2}+\frac{x}{(x+1)^2}$ **b)** $\frac{x^2-9}{2x^2+x}:\frac{x^2-6x+9}{4x^2+4x+1}$ **c)** $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2}-\frac{2x^2-}{2x^3}$

d) $\left(\frac{2}{x}+x^2\right):\frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}$ **e)** $\frac{2x+5}{x+5}+\frac{5x^2}{x-5}-\frac{6x-5}{3x-15}$ **f)** $\frac{2x^3-5x^2+3x}{2x^2+x-6}$

g) $\frac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}$ **h)** $\frac{3x^3-3x}{x^5-x}$ **i)** $\frac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}$ **j)** $\frac{x^3-49x}{x^4-7x^3}$

Solución:

a) Observa que $2x+2=2(x+1)$, por tanto:

m.c.m. $[x+1,\ 2x+2,\ (x+1)^2]=2(x+1)^2$

Así: $\frac{2}{x+1}-\frac{x+3}{2x+2}+\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{4(x+1)}{2(x+1)^2}-\frac{(x+3)(x+1)}{2(x+1)^2}+\frac{2x}{2(x+1)^2}=$

$=\frac{4x+4}{2(x+1)^2}-\frac{x^2+4x+3}{2(x+1)^2}+\frac{2x}{2(x+1)^2}=\frac{4x+4-x^2-4x-3+2x}{2(x+1)^2}=$

b) $\frac{x^2-9}{2x^2+x}:\frac{x^2-6x+9}{4x^2+4x+1}=\frac{(x^2-9)(4x^2+4x+1)}{(2x^2+x)(x^2-6x+9)}$

Factorizamos para simplificar: $\left.\begin{array}{l} x^2-9=(x-3)(x+3) \\ 4x^2+4x+1=(2x+1)^2 \\ x^2-6x+9=(x-3)^2 \end{array}\right\}$ Productos notables

$2x^2+x=x(2x+1)$

Así: $\frac{(x^2-9)(4x^2+4x+1)}{(2x^2+x)(x^2-6x+9)}=\frac{(x-3)(x+3)(2x+1)^2}{x(2x+1)(x-3)^2}=\frac{(x+3)(2x+1)}{x(x-3)}=\frac{2x^2+7x+3}{x^2-3x}$

c) m.c.m. $[x,\ x^2,\ 2x^3]=2x^3$

$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2}-\frac{2x^2-6}{2x^3}=\frac{2x^2}{2x^3}+\frac{2x(x+1)}{2x^3}-\frac{2x^2-6}{2x^3}==\frac{2x^2}{2x^3}+\frac{2x^2+2x}{2x^3}-\frac{2x^2-6}{2x^3}=\frac{2x^2+2x+6}{2x^3}=\frac{x^2+x+3}{x^3}$

d) $\left(\frac{2}{x}+x^2\right):\frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}=\frac{2+x^3}{x}:\frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}=\frac{(2+x^3)(x^2+5x^3)}{x(4x^4+8x)}$

Factorizamos para simplificar:

$x^2+5x^3=x^2(1+5x)$

$4x^4+8x=4x(x^3+2)$

Luego: $\frac{(2+x^3)(x^2+5x^3)}{x(4x^4+8x)}=\frac{(2+x^3)x^2(1+5x)}{x\cdot 4x(x^3+2)}=\frac{1+5x}{4}$

e) Como $3x-15=3(x-5)$, se tiene que: m.c.m. $[x+5,\ x-5,\ 3(x-5)]=3(x-5)(x+5)$

Así: $\frac{2x+5}{x+5}+\frac{5x^2}{x-5}-\frac{6x-5}{3x-15}=\frac{3(2x+5)(x-5)}{3(x-5)(x+5)}+\frac{15x^2(x+5)}{3(x-5)(x+5)}-\frac{(6x-5)(x+5)}{3(x-5)(x+5)}=$

$=\frac{3(2x^2-5x-25)}{3(x-5)(x+5)}+\frac{15x^3+75x^2}{3(x-5)(x+5)}-\frac{6x^2+25x-25}{3(x-5)(x+5)}=$

$=\frac{6x^2-15x-75+15x^3+75x^2-6x^2-25x+25}{3(x-5)(x+5)}=\frac{15x^3+75x^2-40x-50}{3(x-5)(x+5)}==\frac{15x^3+75x^2-40x-50}{3(x^2-25)}$

f) Factorizamos ambos polinomios:

$2x^3-5x^2+3x=x\cdot(2x^2-5x+3)$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm1}{4}\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\ \frac{4}{4}=1\end{cases}$$

Luego: $2x^3-5x^2+3x=x\,(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$$2x^2+x-6=(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)\text{ ya que: } x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-1\pm7}{4}\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\ \frac{-8}{4}=-2\end{cases}$$

Por tanto: $\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{2x^2+x-6}=\dfrac{x\,(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{x\,(x-1)}{x+2}$

g)

- Numerador → Sacamos factor común y descomponemos en factores el polinomio de grado 2 que nos queda:
  $x^3+7x^2+12x=x(x^2+7x+12)$

  $$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{-7\pm1}{2}\begin{cases}-\frac{8}{2}=-4\\ \frac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

  Así: $x^3+7x^2+12x=x(x+4)\ (x+3)$
- Denominador → Descomponemos aplicando Ruffini:

	1	3	−16	−48
4		4	28	48
	1	7	12	0

  $x^2+7x+12$ es una expresión de 2º grado cuyas raíces se calculan resolviendo la ecuación: $x^2+7x+12=0$, que coincide con la del numerador. Así, finalmente, el denominador descompuesto en factores será: $x^3+3x^2-16x-48=(x-4)\ (x+4)\ (x+3)$
- Simplificación de la fracción algebraica: $\dfrac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}=\dfrac{x\,(x+4)(x+3)}{(x-4)(x+4)(x+3)}=\dfrac{x}{x-4}$

h) $\dfrac{3x^3-3x}{x^5-x}=\dfrac{3x\,(x^2-1)}{x\,(x^4-1)}=\dfrac{3x\,(x^2-1)}{x\,(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{3}{x^2+1}$

En el primer paso sacamos factor común y en el segundo paso aplicamos el producto notable $a^2-b^2=(a-b)\ (a+b)$ a la expresión x^4-1.

i) Descomponemos factorialmente el numerador y el denominador:

- Numerador → Sacamos factor común 2 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:
  $2x^3+10x^2+16x+8=2(x^3+5x^2+8x+4)$

	1	5	8	4
−2		−2	−6	−4
	1	3	2	0

$$x^2+3x+2=0 \rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2} \begin{cases} \frac{-4}{2}=-2 \\ \frac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$

Así: $2x^3+10x^2+16x+8=2\,(x+2)^2\,(x+1)$

- Denominador $\rightarrow$ Sacamos factor común 4 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:

$4x^3+8x^2-4x-8=4(x^3+2x^2-x-2)$

	1	2	–1	–2
–2		–2	0	2
	1	0	–1	0

$x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

Así: $4x^3+8x^2-4x-8=4\,(x+2)\,(x+1)\,(x-1)$

- Simplificación: $\frac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}=\frac{2(x+2)^2(x+1)}{4(x+2)(x+1)(x-1)}=\frac{(x+2)}{2(x-1)}=\frac{x+2}{2x-2}$

Se obtiene dividiendo numerador y denominador entre el M.C.D. del ambos, que es $2(x+2)\,(x+1)$.

j) $\frac{x^3-49x}{x^4-7x^3}=\frac{x(x^2-49)}{x^3(x-7)}=\frac{x(x-7)(x+7)}{x^3(x-7)}=\frac{x+7}{x^2}$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable $a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$ a la expresión x^2-49, y finalmente dividimos numerador y denominador entre el M.C.D. de ambos, que es $x\,(x-7)$.

<u>EJERCICIO 18</u> : Opera y simplifica: a) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x^2}\right)$ b) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{2+x}{x^2-4x+x}$

Solución:

a) Observamos que tenemos el producto notable $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.

Así: $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=x^2-\frac{1}{x^4}=\frac{x^6-1}{x^4}$

b) Calculamos el m.c.m. $\left[(x-2),\ (x^2-4x+4)\right]$ que es $(x-2)^2$.

$x^2-4x+4=(x-2)^2$

Luego: $\frac{x+1}{x-2}+\frac{2+x}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}+\frac{2+x}{(x-2)^2}=\frac{x^2-2x+x-2+2+x}{(x-2)^2}=\frac{x^2}{(x-2)^2}$

<u>EJERCICIO 19</u> : Calcula y simplifica: a) $\frac{1}{x^2-x}+\frac{2x-1}{x-1}-\frac{3x-1}{x}$ b) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\frac{2x-10}{x^2-25}$

Solución:

a) m.c.m. $\left[(x^2-x),(x-1),x\right]=x(x-1)$

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{2x-1}{x-1}-\frac{3x-1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{x(2x-1)}{x(x-1)}-\frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)}=$$

$$=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2x^2-x}{x(x-1)}-\frac{3x^2-3x-x+1}{x(x-1)}=\frac{1+2x^2-x-3x^2+3x+x-1}{x(x-1)}==\frac{-x^2+3x}{x(x-1)}=\frac{x(-x+3)}{x(x-1)}=\frac{-x+3}{x-1}$$

b) Efectuamos el cociente: $\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\frac{2x-10}{x^2-25}=\frac{(x^2-6x+9)(x^2-25)}{(x^2+2x-15)(2x-10)}$

Factorizamos para simplificar:

- $x^2 - 25 = (x-5)(x+5) \rightarrow$ Producto notable

$2x - 10 = 2(x-5)$

- $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, ya que las raíces de $x^2 - 6x + 9 = 0$ son:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \text{Raíz doble}$$

- $x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$, ya que las raíces de $x^2 + 2x - 15 = 0$ son:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{cases} \dfrac{-10}{2} = -5 \\ \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Así: $\dfrac{(x^2-6x+9)(x^2-25)}{(x^2+2x-15)(2x-10)} = \dfrac{(x-3)^2(x-5)(x+5)}{(x+5)(x-3)2(x-5)} = \dfrac{x-3}{2}$