CÁCULO DE DOMINIOS

Problema. 18.

Encontrar el dominio de la función siguiente: $h(x) = \dfrac{x^2+5}{x-1}$

Solución. Cuando x = 1 el denominador de la función es cero. Pero cuando x ≠ 1 el denominador es siempre un número real. Por lo tanto el dominio de la función h consiste de todos los números reales *excepto el 1*. Esto se puede escribir de las siguientes dos maneras (1) $D_h = \mathbb{R} - \{1\}$, o bien (2) $D_h = (-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

Problema. 19.

Encontrar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x}$.

Solución. Dado que $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x} = \dfrac{1}{x(x-1)}$

y la división entre 0 no está permitida, vemos que f (x) no está definida cuando x = 0 o x = 1.

Así que el dominio de f es: $D_f = R\text{-}\{0, 1\}$ que también se puede expresar en notación de intervalos como $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Problema. 20.

Sea f la función definida por la ecuación $y = \sqrt{x-2}$. Determinar su dominio y su rango.

Solución. Debido a que los números se limitan a los números reales, *y* es función de x sólo para $x - 2 \geq 0$, ya que para cualquier x que satisfaga esta desigualdad, se determina un valor único de *y*. Sin embargo si $x< 2$, se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo y en consecuencia no existe un numero real y. Por lo tanto x debe de estar restringida a $x \geq 2$, así pues, el dominio de f es el intervalo $[2, +\infty)$, y el rango de f es $[0, +\infty)$.

Problema. 21.

Determinar el dominio y el rango de la función $f(x) = 7 + \sqrt{3x-6}$.

Solución. El radicando $3x - 6$ debe ser no negativo. Al resolver $3x - \geq 0$ se obtiene $x \geq 2$, por lo cual el dominio de *f* es $[2, +\infty)$. Ahora, por definición $\sqrt{3x-6} \geq 0$ para $x \geq 2$, y en consecuencia, $y = 7 + \sqrt{3x-6} \geq 7$. Puesto que 3x – 6 y $\sqrt{3x-6}$ aumentan cuando *x* aumenta, se concluye que el rango de *f* es $[7, +\infty)$.

Determinar el dominio de h(x) = $\sqrt{2-x-x^2}$

Solución: Puesto que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como número real), el dominio de *h* consta de todos los valores de *x* tales que

$$2 - x - x^2 = (2 + x)(1 - x) \geq 0$$

Resolviendo esta desigualdad tenemos que su solución es el intervalo [-2, 1]. Por consiguiente el dominio de h es precisamente este intervalo.

Problema. 22.

Identifique el dominio de las siguientes funciones:

(*a*) $y = 4x^2 + 7x - 19$ (b) $y = \sqrt{t-5}$ (c) $y = \dfrac{6}{x(x+9)}$

(d) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ (e) $y = \dfrac{x}{x^2-36}$ (f) $y = \dfrac{7}{x(x-4)}$

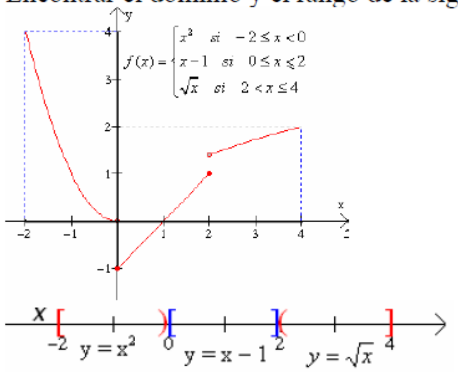
(g) $y = \dfrac{3x}{\sqrt{8-x}}$ (h) $y = \dfrac{6x}{(x-5)(x-9)}$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{5-x}}{x^2-1}$. Sabemos que la división entre cero no está definida, por esta razón debemos de quitar del dominio de la función aquellos valores para los cuales el denominador de la división es igual a cero. Estos valores son x = 1 y x = -1, por lo tanto al intervalo (-∞, 5] debemos de quitarle estos valores, y nos queda que el dominio de la función f/g es (-∞, -1)∪(-1, 1)∪(1, 5].

FUNCIONES A TROZOS

Problema. 24.

Encontrar el dominio y el rango de la siguiente función definida por secciones.



Solución: Nótese que f no representa tres funciones sino más bien a una función cuyo dominio es el conjunto de números reales. Sin embargo, la gráfica de f consta de tres secciones obtenidas trazando, a su vez,

La gráfica de $y = x^2$ para $-2\le x < 0$

La gráfica de $y = x - 1$ para $0\le x \le 2$

La gráfica de $y=\sqrt{x}$ para $2< x \le 4$

Ver las gráficas de la izquierda.

El dominio de la función es la unión de los tres intervalos: $-2\le x < 0$, $0\le x < 2$, $2< x \le 4$. La cual es el intervalo $-2< x \le 4$. El rango es el intervalo $-1< x \le 4$.

Problema. 40.

Trazar la gráfica de la función definida por secciones $f(x)=\begin{cases} -x^2 & si \quad x\le 0 \\ 1 & si \quad 0<x\le 3 \\ x & si \quad x>3 \end{cases}$

Solución: Nótese que f no representa tres funciones sino más bien, a una función cuyo dominio es el conjunto de números reales. Sin embargo, la gráfica de f consta de tres secciones obtenidas trazando, a su vez:

$y = -x^2$ en el intervalo $x \le 0$

$y = 1$ en el intervalo $0 < x \le 3$ y

$y = x$ en el intervalo $x > 3$.

La gráfica se muestra a la derecha.