SOLUCIONES EJERCICIOS DEL RANGO DE MATRICES

Ejercicio 16

c) $|C| = \begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} m \begin{vmatrix} 1 & m-1 & m(m-1) \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} =$

$= m(m-2) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$

(1) Sacando m factor común de la 1.ª columna.

- **Si $m = 0$** $\rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(C) = 2$

- **Si $m = 2$** $\rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(C) = 2$

- **Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$** $\rightarrow |C| \neq 0 \rightarrow ran\,(C) = 3$

Ejercicio 17

a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 1 = 0 \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$

- **Si $k = 1$** $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 3$

- **Si $k = -1$** $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

  $\rightarrow ran\,(A) = 2$

- **Si $k \neq -1$** $\rightarrow ran\,(A) = 3$

b) $B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix} \rightarrow |B| = \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 - 2t = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$

- **Si $t = 0$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

- **Si $t = \sqrt{2}$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

- **Si $t = -\sqrt{2}$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

- **Si $t \neq 0$, $t \neq \sqrt{2}$ y $t \neq -\sqrt{2}$** $\rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -t & 6 & 3-t \end{vmatrix} = t - 9 = 0 \rightarrow t = 9$

- **Si $t = 9$** $\rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -9 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(C) = 2$

- **Si $t \neq 9$** $\rightarrow ran\,(C) = 3$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & a+3 & 4-a \\ 1 & a+3 & a^2+2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$

$$\underset{(1)}{=} (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 4-a \\ 1 & 1 & a^2+2 \end{vmatrix} = (a+3)(a^2+a-2) = 0 \;\begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \\ a = -3 \end{cases}$$

(1) Sacamos $(a+3)$ factor común de la 2.ª columna.

- **Si $a = 1$** $\rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(D) = 3$

- **Si $a = -2$** $\rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$

  $\rightarrow ran\,(D) = 2$

- **Si $a = -3$** $\rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 11 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(D) = 3$

- **Si $a \neq -2$** $\rightarrow ran\,(D) = 3$

EJERCICIOS PARA MAÑANA

Junio 2008. Prueba B.

PR-1.- Se considera el sistema $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$ donde a es un parámetro real

a) Discutir el sistema en función del valor de a

b) Resolver el sistema para a=0

c) Resolver el sistema para a=1

Septiembre 2008. Prueba B.

PR-1.- Sea a un parámetro real. Se considera el sistema $\begin{cases} x + ay + z = 2 + a \\ (1 - a)x + y + 2z = 1 \\ ax - y - z = 1 - a \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del valor de a .

b) Resolver el sistema para a = 0 .

c) Resolver el sistema para a = 1.

PR-1.- Sea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}.$$

a) Discútase según los valores de k e interprétese geométricamente el resultado.

b) Resuélvase el sistema para k=2.

PR-1.- a) Discútase el sistema $\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a + 1)y - z = a - 1 \end{cases}$, en función del valor de a.

b) Para el valor a=1, hállese, si procede, la solución del sistema.