Repaso antes del control del día 23-10-2015

1. Sea $M=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}$.

   a) Calcula x e y para que MN = NM.

   b) Calcula M^{1997} y M^{1998}

   Solución:

   a) $MN=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&0&0\\x&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $NM=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&y\end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix}y&0&0\\x&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&y\end{pmatrix}\Rightarrow y=1, x=0$

   b) $M^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I,\ M^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=M,\ M^4=I,\ M^5=M,\ \ldots$

   Se ve que si el exponente es par es igual a la matriz unidad y si es impar es igual a M, por lo tanto $M^{1997}=M$ y $M^{1998}=I$.

2. Se sabe que $\begin{vmatrix}x&5&1\\y&0&1\\z&3&1\end{vmatrix}=1$. Explicando que propiedades de los determinantes se utilizan y sin desarrollar, calcular el valor de $\begin{vmatrix}y&2y&y+2\\x&2x+5&x+2\\z&2z+3&z+2\end{vmatrix}$.

   Solución:

   $$\begin{vmatrix}y&2y&y+2\\x&2x+5&x+2\\z&2z+3&z+2\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}-\begin{vmatrix}x&2x&x+2\\y&2y+5&y+2\\z&2z+3&z+2\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}-\begin{vmatrix}x&2x&x+2\\y&2y&y+2\\z&2z&z+2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x&0&x+2\\y&5&y+2\\z&3&z+2\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}-\begin{vmatrix}x&0&x+2\\y&5&y+2\\z&3&z+2\end{vmatrix}$$

   $$\overset{(4)}{=}-\begin{vmatrix}x&0&x\\y&5&y\\z&3&z\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x&0&2\\y&5&2\\z&3&2\end{vmatrix}\overset{(5)}{=}-2\begin{vmatrix}x&0&1\\y&5&1\\z&3&1\end{vmatrix}=-2$$

   (1) Al Permutar 1ª y 2ª fila el determinante cambia de signo.

   (2) Los elementos de la 2ª columna los descomponemos en dos sumandos.

   (3) El primer determinante tiene dos columnas proporcionales, por lo tanto es igual a cero.

   (4) Los elementos de la 3ª columna los descomponemos en dos sumandos.

   (5) El primer determinante tiene dos columnas iguales y por lo tanto es igual a cero, el segundo determinante tiene la 3ª columna multiplicada por 2 luego el determinante queda multiplicado por 2.

3. Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Estudiar si existe algún valor de $\lambda\in R$ para el cual se satisfaga $(A-\lambda I)^2=B$.

b) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&3\end{vmatrix}=1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix}x&1/4&4\\y&0&4\\z&1/2&12\end{vmatrix}$

Solución:

a) $A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}$

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+2&-2\lambda+1&-2\lambda\\-2\lambda+1&\lambda^2-2\lambda+2&1\\-2\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Igualando, por ejemplo, los elementos a_{13}: $-2\lambda=-4 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$.
Ahora basta comprobar que para $\lambda=2$ los restantes valores de ambas matrices son iguales.

b) $$\begin{vmatrix}x&1/4&4\\y&0&4\\z&1/2&12\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}x&y&z\\1/4&0&1/2\\4&4&12\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}4\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\1/4&0&2/4\\1&1&3\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}4\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&3\end{vmatrix}=\boxed{1}$$

Propiedades aplicadas: (1) $|A|=|A^t|$ (2) y (3) Extraer el factor común ¼ de la 2ª fila y 4 de la 3ª fila

4. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}a^2&ab&ab\\ab&a^2&b^2\\ab&b^2&a^2\end{pmatrix}$

a) Sin utilizar la regla de Sarrus, calcular el determinante de dicha matriz. [1,5 puntos]
b) Estudiar el rango de A en el caso en que b = –a. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a)

$$\begin{vmatrix}a^2&ab&ab\\ab&a^2&b^2\\ab&b^2&a^2\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}a\begin{vmatrix}a&ab&ab\\b&a^2&b^2\\b&b^2&a^2\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}a^2\begin{vmatrix}1&b&b\\b&a^2&b^2\\b&b^2&a^2\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}a^2\begin{vmatrix}1&b&b\\0&a^2-b^2&0\\0&0&a^2-b^2\end{vmatrix}\overset{(4)}{=}a^2\begin{vmatrix}a^2-b^2&0\\0&a^2-b^2\end{vmatrix}\overset{(5)}{=}$$

$$=a^2\cdot\left(a^2-b^2\right)^2$$

Propiedades aplicadas: (1) y (2) sacar factor común a "a" en la primera columna y en la primera fila. (3) $F_2-b\cdot F_1$, $F_3-b\cdot F_1$
(4) y (5) Desarrollo por los elementos de la primera columna

b) Para b = –a, la matriz A es: $\begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ y como los tres vectores fila son linealmente dependientes, el rango de la matriz es 1.

8. Calcular el rango de la matiz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Solución:

A) Por determinantes: El rango de una matriz A de dimensión mxn es el orden del mayor menor no nulo. Como la matriz A no es la matriz cero, su rango es mayor o igual que 1. Para determinar si tiene rango ≥ 2, se busca un menor (determinante) de orden 2 no nulo.

Por ejemplo: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$

Para determinar si tiene rango 3, partiendo del menor de orden 2 distinto de cero, se estudiarán todos los posibles menores de orden 3 que lo contengan. Si todos ellos son nulos, el rango de A es 2. Si por el contrario, alguno de ellos es distinto de cero, el rango es 3.

En este caso: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}A = 3$.

13. Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Se calcula $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

b) Se calcula la matriz adjunta de A

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = -2$, $A_{23} = -2$,

$A_{31} = -2$, $A_{32} = 4$, $A_{33} = 6$..

Entonces: $\text{Adj.}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) Se calcula la traspuesta de la adjunta: $(\text{Adj.}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

d) La matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj.}(A))^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

14. Halla una matriz X que verifique AX + B = C, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&5&2\\0&1&3\end{pmatrix}$$

Solución:

AX + B = C , AX = C – B, A^{-1} (AX) = A^{-1}(C – B) , (A^{-1} A)X = A^{-1}(C – B) , I X = A^{-1}(C – B),
X = A^{-1}(C – B)

Vamos a calcular la matriz inversa de A, A^{-1}:

$$|A| = 8,\ \text{Adj. }(A)=\begin{pmatrix}8&-4&0\\0&4&-2\\0&0&2\end{pmatrix},\ [\text{Adj. }(A)]^t=\begin{pmatrix}8&0&0\\-4&4&0\\0&-2&2\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$C-B=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&2\\0&1&2\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&2\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\-1/2&-3/4&0\end{pmatrix}$$

16. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\0&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-9&3\\-8&17\end{pmatrix}$ halla:

a) La matriz inversa de C.
b) La matriz X que verifique: AB + CX = D.

a) $|C|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow$ la matriz C tiene inversa

$$\text{Adj}(C)=\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix};\ (\text{Adj.}(C))^t=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{|C|}(\text{Adj.}(C))^t=\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$$

b) AB + CX = D $\Rightarrow$ CX = D – AB $\Rightarrow$ C^{-1} (CX) = C^{-1} (D – AB) $\Rightarrow$ (C^{-1}C)X = C^{-1} (D – AB) $\Rightarrow$ X = C^{-1} (D – AB)

$$AB=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&0\\-2&10\end{pmatrix};\ D-AB=\begin{pmatrix}-9&3\\-8&17\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7&0\\-2&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\-6&7\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\-6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

31. Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\m-4&1&1-m\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

c) Halla el valor de $m\in\mathbb{R}$ para el que la matriz A no tiene inversa.

LO PODÉIS HACER SIN AYUDA