La aventura de la ecuación cúbica

> *Ten en cuenta también que es posible hacer ciertas concesiones a la amenidad, como es frecuente en los libros de historia*
>
> **Cardano**. *De propria vita.* 1576

La historia comienza en la noche del 12 de febrero de 1535. Niccolò Tartaglia sentado en el escritorio de su casa en Venecia lee y relee. Sobre la mesa hay unos papeles escritos con una caligrafía que no es la suya, contienen numerados treinta problemas de matemáticas. Al lado hay una hoja llena de garabatos y de dibujos. Tartaglia cuando se quiere concentrar suele hacer pequeños dibujos sobre un papel. Dibuja letras, caras de monstruos, pequeños dibujos geométricos. Así suele entretener el tiempo a la espera de la idea buena que le permita resolver un problema. Lleva así cuarenta y ocho días encerrado, leyendo y releyendo la lista de problemas planteados por su rival, Antonio María del Fiore. Y la inspiración no llega. Ha llenado ya muchos papeles con garabatos. Ha analizado uno a uno cada uno de los enunciados, y nada. En los últimos días no ha salido de casa. Aunque el enunciado de cada problema es distinto, todos resultan extrañamente parecidos. Analizándolos todos ellos se reducen al capítulo del cubo y la cosa igual a un número. Por ejemplo, uno de ellos dice:

> *Determina por donde debe ser cortado un árbol de 12 varas de altura de tal manera que la parte que quede en tierra sea la raíz cúbica de la parte superior cortada.*

O este otro:

> *Encuentra un número que se convierte en 6 cuando se le suma su raíz cúbica*

El que tiene ahora delante dice así:

> *Un hombre vende un zafiro por 500 ducados, obteniendo así un beneficio de la raíz cúbica del precio que pagó por él. ¿A cuánto asciende el beneficio?*

También este es del mismo tipo. Pero ¿cómo se resolverá?. El plazo marcado por los contrincantes se está agotando. Dentro de ocho días Niccolò deberá consignar ante el notario las soluciones y, hasta ahora, no ha resuelto ninguno de los problemas. Finalmente, avanzada la noche, llega la inspiración. Encuentra una fórmula. Quizás ésta sea *la fórmula*. La emoción casi le impide proseguir. Al tratar de verificar si es válida, se tropieza en los cálculos. En varias ocasiones llega a pensar que se ha equivocado, que el problema no puede resolverse así. Suda a pesar de que es febrero y es de noche y que, apagado el fuego, la casa se ha ido quedando fría poco a poco. El invierno en Venecia es frío y duro. La humedad de la laguna asciende formando brumas en los canales. Penetra por las paredes. Traspasa la ropa y llega hasta los huesos. De nada sirve abrigarse más, ponerse encima más ropa. Es lo mismo. La humedad penetra y llega hasta los pensamientos.

Está casi a punto de desistir, de rendirse a la evidencia de que *fra* Luca debía estar en lo cierto. Que los problemas del cubo y la cosa igual a un número no tienen solución. Pero, a la vez, siente un extraño impulso que le obliga a continuar. Esta lista de treinta problemas debe tener solución. Antonio María del Fiore debe conocer algún secreto, algún método resolutivo, para todos estos problemas que le ha propuesto. Y si este método existe, si lo tiene Del Fiore, él, Niccolò Tartaglia, lo redescubrirá, lo encontrará y resolverá con él los treinta problemas: vencerá la disputa.

Vuelve al rato sobre la última idea, ahora más tranquilo. La intuición a veces va más rápida que el mismo razonamiento y éste se mueve más deprisa que la mano que trata de escribirlo y de plasmarlo en el papel. Pero el planteamiento base está claro en su cabeza. Quizás funcione. Ahora, pausadamente, sólo hay que seguir el razonamiento. Hacer los cálculos, que son laboriosos y lentos. Hay que hacer divisiones, hay que calcular cuadrados y cubos; hay que hacer sumas, calcular los lados de cuadrados y de cubos, restar, y, finalmente, *la cosa*, o lo que debiera ser la cosa. Para comprobarlo bastará calcular su cubo y sumarle luego la misma cosa y... si diera quinientos…

Sí. Da quinientos, luego está bien.¡El método operativo funciona! Antes de irse a dormir escribe todo lo que ha descubierto, lo repasa. Añade algunas notas. Sabe que a partir de ahora bastará trabajar haciendo cálculos, los otros dos capítulos han de tener métodos muy parecidos. Las dos disputas las ha vencido él: la de Del Fiore con sus treinta problemas y la otra, la más importante, la que ha tenido consigo mismo a lo largo de todos estos días, de todas las horas pasadas desde que los problemas le fueron entregados y que descubrió que todos eran parecidos y que no sabía resolver ninguno. Ahora sabe cómo resolverlos. Ha vencido.

Retrocedamos en la historia para empezar a contarla por el principio. Durante el siglo XV, en muchos de los libros de ábaco, escritos por maestros de este tipo de escuelas, se había ido difundiendo el uso del álgebra: la ciencia llegada a Occidente a través de los árabes en los últimos siglos. Muchos la habían estudiado y también muchos, poco a poco, la habían dominado lo suficiente como para encontrarse en disposición de enseñarla. Con el paso del tiempo, algunos de los métodos aprendidos de los libros árabes habían sido clarificados y mejorados. Se habían añadido nuevos problemas y se habían estudiado muchos casos nuevos. Maestro Dardi de Pisa y Maestro Benedetto de Florencia, habían completado a Leonardo Fibonacci con muchos conocimientos nuevos.

Pero un problema se resistía a ser solucionado: el que atañía al cubo, el cuadrado, la cosa y el número y sus diversas variantes, es decir, a la resolución de los distintos casos de la ecuación cúbica. Bien es verdad que algunos habían llegado a deducir que muchos de los casos se podían reducir a uno: resolver la ecuación —o como ellos decían, el capítulo— del cubo y las cosas igual al número. Es decir, la que en lenguaje actual se escribiría $x^3 + px = q$. Pero cómo resolver esta ecuación. Todos los intentos habían sido fallidos. Se habían encontrado soluciones particulares a casos particulares, pero cuando se cambiaban los números las fórmulas ya no valían. Sólo resolvían los problemas concretos para los que habían sido pensadas y no servían para resolver otros problemas similares. Carecían de generalidad. A finales del siglo XV, Luca Pacioli desistió de sus intentos de resolverlo. En su *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Venecia, 1494) mostró sus dudas sobre la posibilidad de resolver las ecuaciones de tercer grado. Escribió:

> *Diría que el arte [el álgebra] a tal caso todavía no ha dado modo [solución], así como todavía no ha dado modo al cuadrar del círculo.*

Y su argumento era un argumento de autoridad. Él había sido el compilador de todos los saberes existentes sobre el álgebra en su tiempo. Su *Summa* era referencia obligada para quién quisiera aprender el *Gran Arte*, el Álgebra. Y aunque Pacioli no había dicho que el problema no tuviera solución, lo había comparado con uno de los problemas más antiguos, la cuadratura del círculo, que había sido el tormento de muchos matemáticos desde la antigüedad, sin que pudieran encontrar la solución. Era, por tanto, situarlo en la esfera de lo inasequible, de lo inalcanzable. Sin embargo la solución no estaba lejos, estaba casi al alcance de la mano.

Un profesor de la Universidad de Bolonia llamado Scipione del Ferro (1465-1526) no muchos años más tarde la encontró. Para resolver la ecuación

$x^3 + px = q$

Empleaba la fórmula:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

La fórmula de Del Ferro es la misma que se sigue utilizando hoy día.

No nos ha llegado ninguna información sobre cómo lo logró. Por no saber, ni siquiera se sabe a ciencia cierta el año de tal descubrimiento, que sin embargo, quizás sea el más importante de las matemáticas del siglo XVI. La pocas referencias disponibles son además indirectas. Según a quién hagamos caso, el año del descubrimiento pudo ser 1505 o 1515. De cualquier manera, de lo que no hay duda es de que fue él, Scipione del Ferro, el primer descubridor. Pero, y ésta no será la única cosa extraña de esta historia, Scipione del Ferro no contó a nadie su solución. Para ser exactos, a casi nadie, ya que, poco antes de morir, compartió su descubrimiento con dos personas: su yerno y sucesor en la cátedra de la universidad, Annibale della Nave, y uno de sus alumnos, el veneciano, Antonio María del Fiore. No se sabe el porqué de este comportamiento que hoy día nos resultaría francamente raro. En la actualidad cualquier científico trata de publicar los resultados de su investigación inmediatamente. La máxima "publica o sucumbe" rige la vida académica de las universidades actuales. Pero las universidades del siglo XVI eran distintas y también los profesores que en ellas trabajaban eran distintos de los actuales. Cualquiera podía ser desafiado a una disputa pública. El adversario proponía preguntas y problemas, y de manera pública, se llevaba a cabo un debate y, como en todo debate, después se declaraba vencedor a uno de los contrincantes. Muchas veces había una apuesta de por medio. Podían jugarse un premio más o menos simbólico o pecuniario. Incluso a veces se ponía en juego la cátedra en la universidad o la posibilidad de conseguirla en el futuro. En todo caso, había algo que siempre entraba en juego en este tipo de debates, el prestigio personal de los contrincantes, su reputación de sabios.

Cuando las disputas eran sobre temas filosóficos o sobre lógica, bastaba muchas veces con tener una buena formación cultural, para poder hacer citas y traer al debate argumentos de autoridad para reforzar las afirmaciones propias vinieran o no al caso. Si a esto se añadía una buena retórica y cierta elocuencia, para saber defender las ideas propias y poder atacar sin piedad al contrincante, el éxito estaba garantizado. De hecho, el debate formaba parte de la educación de todos los estudiantes. En las universidades se aprendía a debatir eficientemente y no faltaban oportunidades de poner en práctica las propias habilidades en este campo. Las disputas académicas y no académicas eran frecuentes y a veces dos colectivos más o menos numerosos actuaban como hinchas. Naturalmente las apuestas se cruzaban, no sólo entre los directamente implicados en el debate, sino también entre los partidarios de cada uno de los contrincantes agrupados en bandos. Cuando el enfrentamiento era entre estudiantes, estos bandos podían estar formados por los miembros del propio *colegio* o de la propia *nación* a la que cada uno de los rivales estaba afiliado. Si el enfrentamiento era entre dos reputados y doctos profesores o aspirantes a serlo, el debate podía convertirse en un acontecimiento de relevancia social. Toda la ciudad opinaba y, de alguna manera, apostaba por uno u otro rival.

En estas circunstancias, ser poseedor de un conocimiento misterioso y exclusivo, como era el caso de Scipione del Ferro y su fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado, podía ser muy conveniente. Bastaba poner problemas al rival que no supiera resolver por no conocer la fórmula y, a la vez, confiar en que las preguntas del rival fueran asequibles. Esa era una buena estrategia para salir airoso, si es que no victorioso, de esas situaciones. Era como lastrar la balanza de antemano en el propio favor. Una especie de seguro ante la adversidad. Claro está que eso imposibilitaba difundir los conocimientos propios y con ello se perdía la fama y el mérito de ser su descubridor. También impedía enseñárselos a los alumnos. Es posible incluso que algunos descubrimientos se hayan ido, por este motivo, a la tumba con sus descubridores. Pero esto nunca lo sabremos.

Antes de morir, Del Ferro comunicó a su yerno y a un alumno su resultado. En el caso de su yerno es fácil imaginarse el motivo: darle la fórmula era una manera de transferirle, junto con la cátedra, su personal seguro de vida. Se garantizaba así no sólo el bienestar de su yerno, sino obviamente también el de su propia hija. Las causas de la transmisión de la fórmula a su alumno Antonio María del Fiore son más oscuras. Quizás fuera su alumno predilecto, quizás confiase en exceso de su habilidad matemática y pensase que podría acabar el trabajo iniciado por él, resolviendo los casos aún pendientes. Es muy probable, no obstante, que de alguna manera le exigiese guardar secreto. En todo caso Del Fiore obtuvo la fórmula de su maestro, aunque es dudoso que llegase a entenderla del todo o, al menos, hay razones para pensar que no sabía bien cómo aplicarla para resolver problemas concretos. Toda la historia narrada hasta aquí sucedió en Bolonia, *la sabia*, la ciudad más docta de la Italia de aquella época.

La narración se traslada ahora a Venecia, la ciudad comercial por excelencia. A ella se había trasladado Niccolò Tartaglia en 1534, desde la ciudad de Brescia donde había nacido. De Venecia era Antonio María del Fiore, que tras sus estudios en Bolonia, había regresado a su ciudad natal. Y aquí coincidieron ambos personajes. Tartaglia daba clases de aritmética en la escuela de ábaco de la iglesia de San Zanipolo. Del Fiore no se sabe exactamente a que se dedicaba en esos momentos. Lo que sí sabemos es que Tartaglia había adquirido cierta fama, realizando algunos trabajos para los ingenieros del famoso Arsenal veneciano. Éstos le habían preguntado, por ejemplo, cuál debía ser el ángulo de inclinación del tubo de un cañón para que el alcance del proyectil fuera máximo. La respuesta de Tartaglia fue 45º y sorprendió a los observadores. Ellos realmente no creían que hubiera que levantar tan alto la boca del cañón para alcanzar la máxima distancia, pero alguna duda tendrían, porque se decidieron a hacer algunas pruebas privadas, que, naturalmente dieron la razón a Tartaglia. Él, además, aseguraba que su resultado se basaba en "razones matemáticas", lo que lo hacía aún más sorprendente.

Indudablemente este hecho le tuvo que proporcionar cierto prestigio, entre los artilleros del Arsenal, y por extensión en los ambientes cultos y eruditos de la ciudad. Del Fiore por otra parte, según contó más tarde Tartaglia, en el año de 1535 se vanagloriaba de haber recibido la fórmula maravillosa 30 años antes de "un gran matemático", en referencia segura, como sabemos, a Del Ferro.

Surgió el debate y se planteó la disputa. Cada uno de los contrincantes planteó al otro treinta problemas. Los de Tartaglia abordaban una variedad de temas aritméticos, geométricos y algebraicos. Los de Del Ferro correspondían todos al mismo patrón: ecuaciones de tercer grado sin término de segundo grado. La apuesta fue la siguiente: el vencedor pagaría al perdedor y a sus amigos una comida. Podrían acudir tantos amigos como problemas hubiera resuelto el ganador. Es decir, si los resolvía todos, la comida sería para treinta comensales.

Del Fiore perdió estrepitosamente. No fue capaz de resolver ni uno sólo de los problemas de Tartaglia. Ni tan siquiera uno que entrañaba la resolución de una ecuación de tercer grado, para la que Tartaglia conocía un método particular.

Tartaglia eximió a Del Fiore del pago del banquete. Quizás fuera este un gesto de generosidad, o quizás fuera sólo una forma sutil de desprecio al adversario. El placer del éxito y el prestigio adquirido por la victoria parecieron bastarle.

A partir del momento del debate, la vida y la persona de Antonio María del Fiore se pierden en la oscuridad. La fama de Niccolò Tartaglia, se vio sin embargo acrecentada. La historia del debate se difundió por las más importantes ciudades del norte de Italia y llegó a oídos, entre otros, de Gerolamo Cardano, el siguiente protagonista de esta aventura.

En 1539 Gerolamo Cardano estaba terminando de escribir su *Practica Arithmetica Generalis*, que esperaba fuera el sustituto del libro escrito más de 40 años antes por Luca Pacioli. Debió de considerar por ello que era interesante incluir en él la fórmula de Tartaglia. Pidió al librero Zuantonio da Bassano, que era conocido de ambos, que se encontrara con Tartaglia en Venecia, cosa que éste hizo el 2 de Enero de 1539. En este encuentro le pidió en nombre de *un hombre respetable, médico de Milán, llamado Messer Gerolamo Cardano* que le contara la forma de resolver las ecuaciones del cubo y la cosa igual a un número para poder publicarla en su libro, reconociendo a Tartaglia como autor. La respuesta fue negativa: *Dile a su Excelencia que deberá disculparme, pero que cuando decida hacer pública mi invención será en mi propia obra y no a través de la de otros...* Tartaglia también rechazó darle las respuestas a los 30 problemas de Del Fiore, proporcionándole únicamente las preguntas que éste le había propuesto en la disputa (que, por otra parte, podían ser obtenidos por cualquier persona pidiéndolas al notario, ya que eran públicas). Rechazó también Tartaglia resolver siete problemas que Cardano le había enviado. Llegó incluso a sospechar que Cardano fuera un hombre de paja de un personaje muy famoso en aquella época y que también había intentado en repetidas ocasiones hacerse con la fórmula de Tartaglia. Éste era Zuanne di Tonini da Coi, al que Cardano describe como *hombre de gran estatura, macilento, pálido,..., de ojos hundidos,..., lento al andar, de pocas palabras, ingenioso y hábil en matemáticas.* Luego, sería el interlocutor de Tartaglia en uno de los libros escritos por él en forma de diálogo.

Pero Cardano volvió a insistir. El 12 de febrero le escribió una carta a Tartaglia mandándole comentarios elogiosos sobre su libro la *Nuova Scientia* y le reiteró sus peticiones. Tartaglia continuó impasible, aunque esta vez aceptó resolver dos de los problemas propuestos por Cardano. Al mes siguiente, el 13 de marzo, Cardano volvió a enviar una nueva carta, esta vez cambiando su estrategia. Le invitaba en ella a pasar unos días con él en Milán y expresaba interés por sus instrumentos de artillería. Argumentaba, además, que si aceptaba la invitación tendría mucho gusto en poder presentarle a Alfonso de Ávalos (1502-1546), Marqués del Vasto, en el castillo de la vecina localidad de Vigevano. Del Vasto era un noble español además de un militar de cierto prestigio. Sobrino del Marqués de Pescara, el que había estado al mando de las tropas del Emperador en la Batalla de Pavía, en esos días era el gobernador del Milanesado. Tartaglia podría mostrarle al Marqués sus estudios e invenciones en el campo de la artillería, de los que el mismo Cardano ya le había hablado. Esta última propuesta debió de interesar a Tartaglia, que finalmente decidió aceptar la invitación y acudir a Milán. El encuentro tuvo lugar en la casa de Cardano el 25 de marzo de 1539.

Las presiones de Cardano sobre Tartaglia durante la breve estancia de éste en Milán debieron ser grandes.

En versión de Tartaglia esto es lo que ocurrió:

> ***Niccolò**. Te digo: he rechazado tu petición no por causa de este capítulo y de los descubrimientos que en él se encuentran, sino por las cosas que pueden ser descubiertas conociéndolo, puesto que es la llave que abre el camino para numerosas otras áreas. Yo mismo habría encontrado [usándola] una regla general para muchos otros problemas, si no estuviera ocupado en la traducción de Euclides a la lengua nacional (hasta el momento he llegado en mi traducción hasta el Libro XIII). Pero cuando esta tarea que ya he empezado, esté acabada, planeo publicar una obra sobre su aplicación práctica junto con una nueva álgebra... Si se la diera a un teórico, como vuestra Excelencia, él podría fácilmente encontrar otros capítulos, con la ayuda de esta explicación (ya que es fácil aplicar la explicación a otras cuestiones) y publicar los frutos de mi descubrimiento bajo otra autoría. Esto acabaría con todos mis planes.*
>
> ***Messer Gerolamo**. Juro por los Santos Evangelios y por mi fe como caballero no hacer públicos tus descubrimientos, si me los cuentas; del mismo modo prometo y aseguro por mí fue de buen cristiano que los escribiré en cifra, de manera que nadie que los lea tras mi muerte pueda comprenderlos. Si yo, en opinión vuestra soy un hombre honesto, contádmelo y, si no es así, demos entonces por terminada esta conversación.*
>
> *Niccolò. Si no confiara en un juramento como el vuestro, entonces, desde luego, yo mismo merecería ser considerado un ateo.*

Finalmente Tartaglia cedió, por tanto, a comunicar su fórmula. No queda claro, de la lectura de este fragmento, cuáles fueron las razones últimas de este cambio de actitud. Quizás fue verdad que se conmovió ante el juramento de Cardano.

En este momento entra en escena el siguiente personaje de esta historia, Ludovico Ferrari, que en esa época era sirviente en casa de Cardano y su secretario personal. Tenía sólo 17 años. Con él había aprendido griego, latín y matemáticas y poco a poco se había convertido más en colega y amigo de Cardano que en verdadero sirviente. Ferrari debió ser testigo de la escena que acabamos de narrar. Años más tarde, rememorándola, afirmó que la versión de los hechos dada por Tartaglia no se ajustaba del todo a lo verdaderamente sucedido.

Tartaglia se decidió a comunicar su *método operativo* y lo hizo mediante unas rimas que había escrito para facilitar su memorización. Con ellas trasmitió la manera de resolver los tres *casos* en los que la ecuación cúbica sin término de segundo grado puede presentarse, $x^3 + px = q$, $x^3 + q = px$ y $x^3 = px + q$. Volveremos sobre estos versos y sobre el análisis de su contenido más adelante.

Por circunstancias desconocidas, Tartaglia decidió abandonar Milán al día siguiente, sin ni siquiera esperar a ser presentado por Cardano al Marqués del Vasto. Sobre este hecho no hay más luz. ¿Qué le hizo cambiar de idea? Quizás fuera el arrepentimiento súbito por haber accedido a revelar a Cardano su secreto o quizás, simplemente, decidiera a última hora cambiar de parecer por algún motivo desconocido ajeno a esta historia. Hay quien afirma incluso que quizás Cardano hipnotizó a Tartaglia, para que le hiciera sus revelaciones. Al fin de cuentas, Cardano era un experto en sueños y en su interpretación. El carácter de Tartaglia, en cualquier caso, era un carácter extraño. Se relacionaba mal con la gente y era mas bien introvertido, justo lo contrario de Cardano. La cuestión es que, por las razones que fueran, Tartaglia el día 13 de marzo de 1539 abandonó la casa de Cardano y partió de Milán de vuelta a su casa.

En ese mismo año Cardano le envió una copia de su libro *Practica Arithmetica,* recién salido de la imprenta y sin ninguna referencia a la ecuación de tercer grado, lo que debió dejar bastante tranquilo a Tartaglia. Acompañaba al libro una carta en la que se leía: *He verificado la fórmula y creo que tiene un amplio significado.*

Cardano debió dedicarse a estudiar con profundidad la fórmula de Tartaglia, probablemente asistido por su ayudante Ludovico Ferrari. Al poco tiempo había logrado resolver la ecuación general de tercer grado, es decir la completa $x^3 + px^2 + qx = q$, reduciéndola mediante una transformación a una de las tres versiones reducidas de Tartaglia. Pero en ese proceso se encontró con una dificultad seria. Al aplicar la fórmula de Tartaglia a ciertas ecuaciones aparentemente normales, de las que incluso por tanteo conocía alguna solución entera, aparecían raíces cuadradas de radicando negativo En un momento en que ni siquiera los números negativos eran aceptados imaginemos lo que esto pudo suponer. Estas ecuaciones pertenecían al tipo que luego sería llamado *caso irreducible*, y que analizaremos junto con la fórmula de Tartaglia, en el capítulo siguiente.

Por tres veces escribió Cardano a Tartaglia pidiéndole explicaciones. La última el 4 de agosto de 1539, pero Tartaglia no le dio ninguna respuesta sobre este asunto. Probablemente no las tenía.

La historia se traslada ahora de nuevo a la ciudad de Bolonia. Allí viajaron en 1542 Cardano y Ferrari para hablar con Annibale della Nave. Su intención era recibir su autorización para, buscando en los papeles de Scipione del Ferro, poder encontrar más información sobre qué hacer en el caso de las ecuaciones irreducibles. Della Nave accedió a la petición de Cardano y le permitió revisar los papeles de Del Ferro. Ayudado por Ferrari no tardó en encontrar algo, pero no fue lo que estaba buscando, sino directamente el método operativo para resolver la ecuación reducida de tercer grado. Este método era el mismo que Tartaglia le había comunicado y del que, por tanto, no era Niccolò el primer descubridor. En las caras de Ferrari y de Cardano se debió dibujar una gran sonrisa. Si publicaban la fórmula, no sería la de Tartaglia la que publicasen, sino la de Del Ferro, que, aunque fuera la misma, era anterior, la vieja fórmula que ahora acababan de encontrar directamente ellos, escondida entre aquellos papeles. Cardano así no incumpliría el juramento, simplemente divulgaría algo que había tomado de otra fuente. Tomó la decisión de publicarlo todo en un libro.

La redacción de su *Ars Magna* (cuyo titulo completo es *Artis Magnae sive de regulis algebraicis,* es decir, *Del Gran Arte, o de las reglas algebraicas)* se demoró aún algún tiempo. Pero en 1545 estaba lista y vio la luz en una imprenta de Nuremberg. En esta obra aparecía el capítulo del *cubo y las cosas igual al número,* los otros dos capítulos contenidos en los versos de Tartaglia, referentes a las ecuaciones de tercer grado reducidas y otros 10 más hasta un total de 13, que cubrían todas las formas posibles en las que una ecuación cúbica podía presentarse. Además se incluía la solución para las ecuaciones de cuarto grado descubierta por Ferrari, reduciéndola, mediante una cierta estrategia, a una ecuación de tercer grado. El conjunto de los avances que este libro aportaba era incalculable.

Analicemos algunas de las cosas que en él escribió Cardano. Esta es, por ejemplo, su versión de los hechos anteriores, tal y como la narra en la introducción:

En nuestros días, Scipione del Ferro de Bolonia resolvió el caso del cubo y la cosa igual al número. (...) Emulándolo, mi amigo Niccolò Tartaglia de Brescia resolvió el mismo caso, con ocasión de la disputa que tuvo con su discípulo [de Del Ferro] Antonio María del Fiore, esperando así no ser vencido, y, movido por mis ruegos, me la confió a mí. Por lo que a mí respecta, de hecho, engañado por las palabras de Luca Pacioli, el cual niega que pueda existir alguna otra regla general más allá de sus capítulos (a pesar de que a través de otras cosas encontradas por mí me encontrara ya muy cerca) desesperaba por encontrar lo que no osaba a buscar. Entonces, una vez que hube recibido la solución de Tartaglia, y buscado su demostración, comprendí que había otras muchas cosas que se podían obtener de ella. Guiado por esta idea y con confianza creciente, descubrí estas otras, en parte por mí mismo, en parte con la ayuda del entonces mi alumno, Ludovico Ferrari. En lo que sigue, aquellos capítulos que hayan sido descubiertos por otros aparecerán atribuidos a su descubridor; aquellos que aparezcan sin nombre son míos. Con respecto a las demostraciones, excepción hecha de las tres de Mahoma [Al-Khwarizmi] y las dos de Ludovico, todas son mías

En el Capítulo XI aborda por fin la resolución de la ecuación cúbica reducida. Se titula *Del cubo y de la cosa igual al número*. En él Cardano escribe:

Scipione del Ferro, de Bolonia, hace más de 30 años inventó esta regla y la comunicó a Antonio María del Fior, de Venecia, quien celebró un certamen con Niccolò Tartaglia, de Brescia, lo que dio ocasión a que Niccolò por sí mismo la [re]descubriera, el cual me la dio a mí, suprimida la demostración, como consecuencia de mis ruegos. Pertrechado de este auxilio, busque la demostración por varios caminos, lo que fue muy difícil.

Por dos veces agradece por tanto a *su amigo* Niccolò haberle dado la fórmula. Y todavía cita a Tartaglia una vez más, cuando en el capítulo VI del *Ars Magna* titulado *De los métodos para resolver nuevos casos* dice:

Cuando entendí que la regla que Niccolò Tartaglia me había proporcionado, había sido descubierta por él a través de una demostración geométrica, pensé que éste era el camino regio que había que recorrer en todos los casos.

De poco consuelo debieron servir a Tartaglia todos estos reconocimientos de Cardano. El asunto central para él era que Messer Cardano había incumplido su juramento, que le había traicionado.

Un año más tarde, en Venecia y a sus expensas, lo que demuestra su impaciencia, Tartaglia publicó un nuevo libro, *Quesiti ed inventioni diverse*(1546). En este libro vuelve a aparecer ese personaje misterioso descrito por Cardano y que había intentado antes que él hacerse con la fórmula de Tartaglia sin éxito, Zuanne di Tonini da Coi. Pero esta vez es el interlocutor del diálogo del Libro IX. Dialogando con él, Tartaglia cuenta su versión de los hechos. De aquí son los párrafos de Tartaglia citados anteriormente. Da Coi le hace preguntas y Tartaglia argumenta sobre ellas. Reproduce también Tartaglia las cartas intercambiadas sobre este asunto con Cardano. Le insta a desdecirlo si algo de lo que afirma fuera falso. Tartaglia se sentía especialmente molesto por la frase de Cardano en la que decía que, si no llega a ser por las dudas sembradas en él por Pacioli, habría él mismo encontrado la solución. Tartaglia se toma a broma la disculpa de Cardano *casi queriendo decir* escribe*, que si vos os hubieseis puesto a buscarla, la habríais encontrado, lo cual verdaderamente me produce risa.* No obtuvo ninguna respuesta de Cardano.

El argumento de esta historia vuelve a reanudarse el 10 de febrero de 1547. Tartaglia por fin obtuvo respuesta a sus quejas, pero no de Cardano sino de Ludovico Ferrari. Y esta respuesta le llegó por medio de un *cartel*. Los carteles eran una especie de carta pública, impresa y distribuida a todos los que en el asunto tuvieran algo que ver, o que opinar. Ferrari envió este primer *cartel* no sólo a Tartaglia, sino a todos los matemáticos conocidos del momento. La imprenta venía así a jugar un nuevo papel en la historia de la ciencia, contribuyendo a la difusión de estos documentos a caballo entre el panfleto y el prospecto publicitario. En su cartel, Ferrari no sólo no se defendía de las acusaciones contra Cardano hechas por Tartaglia, sino que pasaba directamente al ataque. Acusaba a Tartaglia de haber plagiado partes de su libro, señalaba múltiples defectos de la obra, y le acusaba de tener mala memoria a la hora de recordar lo sucedido. Lo desafiaba además a un nuevo debate público sobre: *Geometría, Aritmética y las disciplinas que de ellas dependen, como Astrología, Música, Cosmografía, Perspectiva, Arquitectura y otras*. Ferrari afirmaba estar listo para discutir no sólo sobre lo escrito sobre estos asuntos por los autores griegos, latinos o italianos, sino incluso sobre los propias trabajos de Tartaglia, siempre que él, en correspondencia, aceptase discutir sobre los de Ferrari.

Tartaglia dio su respuesta con otro *cartel* fechado el 19 de febrero, pidiendo que fuera Cardano el que diera la cara y no su alumno. *Yo me expresé de esa manera tan calumniosa y usando palabras tan afiladas,* decía describiendo el tono de sus *Quesiti para incitar a su Excelencia, y no a vos, a escribirme de su propia mano. Tengo muchas cuentas pendientes con él...* Pero Cardano continuó guardando silencio. A este cartel siguió otro de Ferrari, en esta ocasión llegaba a afirmar lo siguiente:

> *Cardano recibió de ti aquella invencioncilla del cubo y el lado igual al número, y para reanimarla de la muerte, que tenía próxima, la injertó, cual languideciente y semimuerta plantita en un amplísimo y feracísimo huerto, en su sutilísimo y eruditísimo volumen; te celebró como inventor y recordó que te había rogado mucho para que se la confiases. ¿Qué más quieres?*

Los carteles finalmente fueron doce, seis de Ferrari y seis respuestas de Tartaglia, y aparecieron a lo largo de un año y medio. Tartaglia dirigía todas sus respuestas a ambos, *Vos, Messer Gerolamo, y vos, Messer Ludovico...* En el que lleva la fecha de 21 de abril de 1547, Tartaglia enviaba una lista de treinta y un problemas para que su contrincante los resolviera. En el cartel de respuesta, fechado el 24 de mayo, Ferrari le enviaba otros treinta y un problemas.

Nuevamente Tartaglia se encontraba ante un desafío y treinta y uno fueron esta vez los problemas que los contrincantes se cruzaron. Entre los de Ferrari aparecían algunos de aspecto enteramente nuevo, en este tipo de debates. Estos son unos ejemplos:

> *Cuestión 17. Divide el número 8 en dos partes de manera que su producto multiplicado por la diferencia entre las partes sea tan grande como sea posible, demostrando cada paso.*

> *Cuestión 21. Encuentra seis cantidades en progresión geométrica tales que el doble de la segunda más el triple de la tercera iguale a la raíz cuadrad de la sexta.*

La cuestión 22 pedía una exposición sobre las ideas contenidas en un pasaje del *Timeo* de Platón. La penúltima decía:

> *Cuestión 30. Es la unidad un número.*

El último de los carteles lleva la fecha de 24 de julio de 1548, en él Tartaglia aceptaba definitivamente las condiciones del duelo, el lugar y los jueces, junto con la fianza que cada uno debía abonar como garantía. Éste tuvo lugar en la tarde del 10 de agosto de 1548 en Milán, en la iglesia de Santa María del Giardino de la Orden de los Frailes Menores Observantes.

Cada uno de los contrincantes presentó sus respuestas a los problemas planteados por el otro.

La contestación de Tartaglia al problema 17 fue que las partes pedidas eran

$$4+\sqrt{5\tfrac{1}{3}} \quad \text{y} \quad 4-\sqrt{5\tfrac{1}{3}}$$

Pero Ferrari alegó que se había olvidado de la parte más importante del enunciado, la que decía *demostrando cada paso.* La respuesta de Tartaglia al problema 21 fue que la razón de la progresión aritmética era

$$\sqrt[3]{47+\sqrt{12}} + \sqrt[3]{47-\sqrt{12}}$$

Añadiendo que no tenía interés escribir los seis términos ya que hacerlo no requería ninguna habilidad especifica. En la cuestión 22 protestó, alegando que no era de carácter matemático.

A la sesión publica del duelo acudió una multitud. Entre el público figuraban muchas personalidades de la ciudad, incluido el nuevo gobernador del Milanesado Ferrante Gonzaga, el sucesor del Marqués del Vasto, que actuaba como juez. Sin embargo lo más destacable, además de la victoria de Ferrari, fue una ausencia. La de

Cardano. Las discusiones sobre un problema de Ferrari que Tartaglia no había resuelto alargaron la sesión hasta la hora de la cena, quedando interrumpida hasta el día siguiente. A esta nueva sesión Tartaglia no se presentó, por lo que Ferrari debió ser proclamado ganador. Más tarde Niccolò escribiría que el acoso de la multitud, favorable al contrincante local influyó en el resultado. Ferrari, que en la época del desafío era un joven de 26 años, resultó tener un nivel intelectual muy superior al de su contrincante. Un historiador de las matemáticas, H. Eves, analizando lo sucedido llega a afirmar que bastante suerte tuvo Tartaglia de salir con vida de Milán.

La historia termina el día 11 de agosto de 1548. Estaba amaneciendo. Niccolò Tartaglia, subido en una burra de poca alzada, dejaba a sus espaldas Milán en dirección oeste. Hacia Brescia, su ciudad natal. No obstante, ya desde el día anterior, cuando cenaba en esa venta de mala muerte a la que se había tenido que trasladar casi como un fugitivo al atardecer, había decidido no entrar en la ciudad y bordearla por caminos secundarios en dirección a Venecia. Pocos eran ya los amigos que le quedaban en Brescia de cuando era joven. Y seguro que estos pocos no tendrían muchos motivos para vanagloriarse de su amistad cuando llegaran las noticias de lo sucedido el día anterior en Milán y de su huida incluso antes de que acabase la disputa.

Las malas noticias, además, son siempre más veloces que las buenas. Probablemente a estas horas ya estarían circulando algunos rumores interesados y más de uno se estaría frotando las manos de la tajada que podría obtener de los restos del naufragio de Niccolò. Algunos candidatos al puesto que le habían ofrecido a él estarían en estos momentos eligiendo a quién dirigir ahora sus ataques. Vencido el primer y más importante de los rivales el camino se abría más expedito que nunca. Y todo gracias a su derrota.

Todavía se preguntaba quién habría sido el instigador de esa carta que poco tiempo antes le había dirigido el Consejo de Brescia, y en la que se le sugería, se le invitaba —en realidad, quedaba claro por el tono que se le imponía como *conditio sine qua non*— a que aceptase el desafío de Ferrari.

Desde el principio supo que todo jugaría en su contra. La Naturaleza le había proporcionado sin duda muchas cualidades, pero la elocuencia nunca había estado entre ellas. Muchos pensaban que se debía a su condición de lisiado, a ese corte salvaje que había recibido en el cuello cuando era joven, y que le había privado del habla durante casi un año entero, dejándole tartamudo para siempre. Pero él sabía que no. Desde mucho antes de eso había sido consciente de las dificultades para expresar sus pensamientos, tanto hablando como escribiendo. Se acordaba ahora de su primer maestro, Messer Francesco, con el que aprendió las primeras cuentas en Brescia, Niccolò –le decía- escribir no es lo tuyo.

Ludovico Ferrari, por el contrario, era elocuente. Los *cartelli* lo habían demostrado ampliamente. Y al servicio de esa elocuencia era capaz de supeditar otras cosas, a veces incluso la verdad y la corrección. Los insultos los sabía desperdigar a lo largo del escrito en parte para ganarse a la audiencia —y bien que se encargó él de que ésta fuera amplia, enviando esos libelos a media humanidad— en parte porque era consciente de que la capacidad de respuesta de Tartaglia siempre era menor y cruelmente se aprovechaba de esta ventaja. Pero sólo él, Tartaglia, había captado los matices que se ocultaban bajo estos escritos tan difundidos. Sólo él había sido consciente de que Ferrari no sólo estaba dotado para el insulto cruel y para la mentira. Había descubierto enseguida que bajo sus palabras se escondía una mente muy dotada para el razonamiento lógico, superior a la suya, viva, ágil y persuasiva. Una mente capaz de mostrar algo que él no había tenido nunca, un uso sutil del humor, de la ironía, pero capaz también de dar la vuelta a las cosas en un instante, como quien maneja la espada en una disputa. Una mente dotada en suma para las matemáticas. Alguien que podía afrontarlas improvisando, quizás incluso mientras su mente se empleaba en otra cosa, como buscar el insulto más hiriente, la frase que encerrase más desprecio hacia su adversario.

Quién era además Ferrari para desafiarlo. Su rival, el hombre capaz de desvelar el secreto que había jurado no revelar jamás, era Messer Gerolamo, el amigo traidor, no Ferrari. Ludovico Ferrari, era sólo un sirviente. Messer Gerolamo había sido el traidor y era él quien hubiera debido dar la cara.

Pero no la había dado. Ésta había sido una de las razones para no aceptar el desafío. Y no lo habría aceptado si no se hubiese visto obligado a ello. Una de dos o Cardano se sentía inferior a él y por eso dio instrucciones para que contestara su secretario, o bien, pretendió practicar una sutil forma de desprecio no contestando él en primera persona. El caso es que Cardano no se dignó en contestar a su amigo Niccolò, como se había atrevido a llamarlo en su *Ars Magna*. A él, que le había regalado aquella maldita formula para resolver los problemas del cubo y de la cosa, sin los que la obra de Cardano no hubiera existido.

Que ingenuo había sido, pensó Tartaglia. Después de lo sucedido el día anterior era plenamente consciente de su ingenuidad. Pero ahora ya nada tenía remedio.

Francisco Martín Casalderrey
Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento Italiano.
Capítulo 4
Nivola, 2000