RESUMEN TEÓRICO

4.- ECUACIONES DE LA RECTA.

Una recta r queda determinada por un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ de la recta y un vector $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ paralelo a dicha recta (vector director).

- Ecuación vectorial de la recta:

$$r \equiv (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (d_1, d_2, d_3).$$

- Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = p_1 + d_1 \cdot \lambda \\ y = p_2 + d_2 \cdot \lambda \\ z = p_3 + d_3 \cdot \lambda \end{cases}$$

- Ecuación continua de la recta:

$$r \equiv \frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} = \frac{z - p_3}{d_3}.$$

También se puede expresar una recta como intersección de dos planos:

- Ecuación implícita de la recta:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d = 0 \end{cases}$$

En este caso, podemos conseguir puntos de la recta resolviendo el sistema y su vector director se consigue haciendo el producto vectorial $\vec{d} = (a, b, c) \times (a', b', c')$.

5.- POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS.

Dos rectas en el espacio pueden ser coincidentes, paralelas, pueden cortarse en un punto o pueden cruzarse. Para estudiar posiciones relativas entre dos rectas, r y s, utilizaremos rangos. Consideramos las matrices:

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} d_1 & d_1' \\ d_2 & d_2' \\ d_3 & d_3' \end{matrix}}_{M} \middle| \begin{matrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{matrix} \right)$$

donde conocemos $r \equiv \begin{cases} P(p_1, p_2, p_3) \\ \vec{d} = (d_1, d_2, d_3) \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} Q(q_1, q_2, q_3) \\ \vec{d} = (d_1', d_2', d_3') \end{cases}$.

Entonces:

- Si $\operatorname{ran}(M) = \operatorname{ran}(M') = 1 \Rightarrow$ **r y s coinciden**.
- Si $\operatorname{ran}(M) = 1 \neq \operatorname{ran}(M') = 2 \Rightarrow$ **r y s son paralelas**.
- Si $\operatorname{ran}(M) = \operatorname{ran}(M') = 2 \Rightarrow$ **r y s se cortan**.
- Si $\operatorname{ran}(M) = 2 \neq \operatorname{ran}(M') = 3 \Rightarrow$ **r y s se cruzan**.

6.- ECUACIONES DEL PLANO.

Un plano π queda determinado por un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ del plano y dos vectores paralelos al mismo y linealmente independientes entre sí (no proporcionales): $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, llamados vectores posicionales.

- Ecuación vectorial del plano:

$$\pi \equiv (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3).$$

- Ecuaciones paramétricas del plano:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = p_1 + u_1 \cdot \lambda + v_1 \cdot \mu \\ y = p_2 + u_2 \cdot \lambda + v_2 \cdot \mu \\ z = p_3 + u_3 \cdot \lambda + v_3 \cdot \mu \end{cases}$$

- Ecuación implícita del plano:

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

En este caso, el vector $\vec{n}_\pi = (a, b, c)$ es un **vector normal** (perpendicular al plano π).

Además

- Si conocemos un punto del plano, P, y dos vectores posicionales, $\bar{u}$ y $\bar{v}$, es fácil conseguir la ecuación implícita de la siguiente manera:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-p_1 \\ u_2 & v_2 & y-p_2 \\ u_3 & v_3 & z-p_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

- Si conocemos un punto del plano P y su vector normal $\bar{n}_\pi = (a,b,c)$, la ecuación implícita es

$$\pi \equiv a\cdot(x-p_1)+b\cdot(y-p_2)+c\cdot(z-p_3)=0 .$$

En este caso, también se puede imponer que el punto P ϵ π, y debe cumplir su ecuación, es decir, sustituir las coordenadas del punto en la ecuación del plano y calcular d.

7.- POSICIONES RELATIVAS ENTRE PLANOS.

Dos planos en el espacio pueden ser coincidentes, paralelos o cortarse en una recta. Para distinguir cada caso consideramos los planos

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv ax+by+cz+d=0 \\ \pi_2 \equiv a'x+b'y+c'+d' =0 \end{cases}$$

y las matrices

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix}}_{M} \middle| \begin{matrix} d \\ d' \end{matrix} \right).$$

Entonces

- Si $ran(M) = ran(M') = 1 \Rightarrow$ **π₁ y π₂ son coincidentes**.
- Si $ran(M) = 1 \neq ran(M') = 2 \Rightarrow$ **π₁ y π₂ son paralelos**.
- Si $ran(M) = ran(M') = 2 \Rightarrow$ **π₁ y π₂ se cortan en una recta**.

Tres planos en el espacio pueden ser coincidentes (S.C.I.), paralelos (S.I.), dos paralelos cortados por un tercer plano (S.I.), las tres caras de un prima de base triangular (S.I.), pueden cortarse en una recta (S.C.I.) o pueden cortarse en un punto (S.C.D.). Formando un sistema de ecuaciones y aplicando el T$^{\underline{ma}}$ de Rouchè podremos distinguir cada uno de los casos.

8.- POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTA Y PLANO.

En el espacio, una recta r puede estar contenida en un plano π, puede ser paralela a ese plano o lo puede cortar en un punto.

- <u>La recta r está contenida en el plano π</u>.- En este caso se deben cumplir dos condiciones:
  1. El vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares: $\bar{d}_r \perp \bar{n}_\pi \Rightarrow \bar{d}_r \cdot \bar{n}_\pi = 0$.
  2. Un punto cualquiera, P, de la recta r también pertenece al plano π.

- La recta r es paralela a plano π.- En este otro caso se debe cumplir:
    1. El vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares: $\vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$.
    2. Un punto cualquiera, P, de la recta r no pertenece al plano π.
- La recta r corta al plano π en un punto P.- En este caso el vector director de la recta y el vector normal al plano forman un ángulo distinto de 90°. Podemos calcular el punto de corte estableciendo un sistema de ecuaciones entre las ecuaciones de la recta y las del plano.