

## TEMA 8 – LÍMITES

### CÁLCULO DE LÍMITES

**EJERCICIO 1** : Da una definición para estas expresiones y represéntalas gráficamente:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

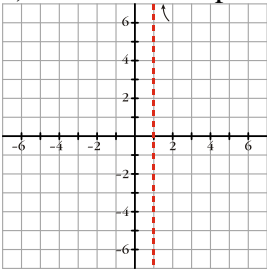
c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1} = 2$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

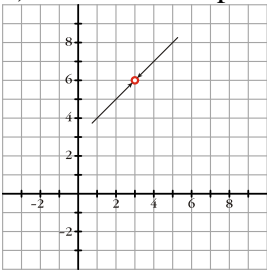
e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 2x} = 5$

*Solución:*

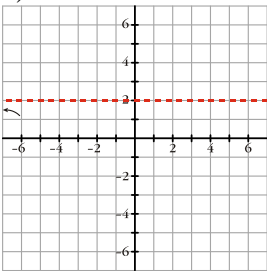
a) Cuando x se aproxima a “1”, la función se hace muy grande



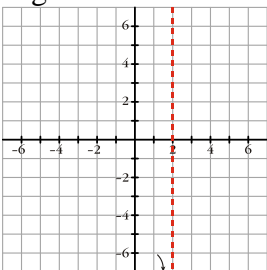
b) Cuando x se aproxima a “3”, la función se aproxima a “6”



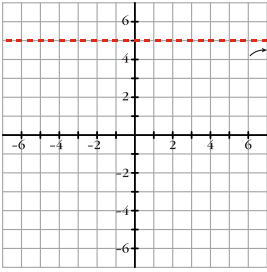
c) Cuando x toma valores muy grandes negativos la función se aproxima a 2.



d) Cuando x se aproxima a 2, con valores menores que 2, la función toma valores muy grandes negativos.



e) Cuando x toma valores muy grandes positivos, la función se aproxima a 5.

**EJERCICIO 2 : Calcula:**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - x^2 + 1]$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{\log x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3x^2 - \sqrt{x^9 + 1}]$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{\log x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2^x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2^x - x^2]$

h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - \log x]$

j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{x^2 + 1}$

*Solución:*

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - x^2 + 1] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{\log x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x}{\log x^2} = +\infty$

Porque una potencia es un infinito de orden superior a un logaritmo.

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3x^2 - \sqrt{x^9 + 1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -x^{\frac{9}{2}} \right] = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{-x+1} = \frac{0}{-\infty} = 0$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{\log x} = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{2^{-x}} = -\infty$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2^x - x^2] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{-x} = 0$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - \log x] = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{-x}}{x^2 + 1} = \frac{0}{+\infty} = 0$

**EJERCICIO 3 : Halla los límites:**

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{5x^2 - 2x - 3x} \right] & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^6 - 2x}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{2x^4 + 1}} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3x + 1}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 - 3x + 2x} \right] & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{3x^2 - 1 - 2x} \right] & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}} \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x^2}{x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}} & & 
 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{5x^2 - 2x - 3x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{5x^2 - 2x - 3x})(\sqrt{5x^2 - 2x + 3x})}{\sqrt{5x^2 - 2x + 3x}} = \\
 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x - 9x^2}{\sqrt{5x^2 - 2x + 3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 - 2x}{\sqrt{5x^2 - 2x + 3x}} = -\infty \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^6 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 1}{\sqrt{x^6 + 2x}} = 0 \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{2x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{2x^4 + 1}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1) - x^3(x + 2)}{(x + 2)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 1 - x^4 - 2x^3}{x^3 + x + 2x^2 + 2} = \\
 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = -2 \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3x + 1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 - 3x + 2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 3x - 2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x - 2x})(\sqrt{x^2 + 3x + 2x})}{\sqrt{x^2 + 3x + 2x}} = \\
 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 4x^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2x}} = -\infty \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{3x^2 - 1 - 2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 - 1 - 2x})(\sqrt{3x^2 - 1 - 2x})}{\sqrt{3x^2 - 1 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{3x^2 - 1 + 2x}} = \\
 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 1}{\sqrt{3x^2 - 1 + 2x}} = -\infty \\
 \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{-2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}} = 0 \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x^2}{x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3(x + 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 3x^2 - x^4 - x^3}{x^3 + x + x^2 + 1} = \\
 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2}{x^3 + x^2 + x + 1} = +\infty \\
 \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}
 \end{array}$$

**EJERCICIO 4 : Calcula:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 8x^2 + 7x - 2}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+4} - 2}{\sqrt{x+1} - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{2x}{x^2 - 9} - \frac{x+1}{x-3} \right]$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^3 - 3x^2 + 4}$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 8x^2 + 7x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{(2x+1)(x-1)^2}{(3x-2)(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{2x+1}{3x-2}} = \sqrt[3]{3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+4} - 2}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+4} - 2)(\sqrt{2x+4} + 2)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{2x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+4-4)(\sqrt{x+1} + 1)}{(x+1-1)(\sqrt{2x+4} + 2)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{2x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{x+1} + 1)}{\sqrt{2x+4} + 2} = \frac{4}{4} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-5}{0}$

Hallamos los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = +\infty \Rightarrow$  No existe

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{2x}{x^2 - 9} - \frac{x+1}{x-3} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - (x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - (x^2 + 4x + 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+3)(x-3)} = \frac{-18}{0}$

Hallamos los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+3)(x-3)} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+3)(x-3)} = -\infty \Rightarrow$  No existe

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^3 - 3x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = \frac{9}{0}$

Hallamos los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = +\infty \Rightarrow$  No existe**EJERCICIO 5 : Calcula los límites:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+4}{x^2 - x + 6} \right)^{\frac{3x}{x-1}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 4} \right)^{\frac{x}{x-2}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2 - x + 1}{4x + 4} \right)^{\frac{2x}{x-3}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{5x + 1} \right)^{\frac{3}{x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+4}{x^2 - x + 6} \right)^{\frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+4}{x^2 - x + 6} - 1 \right) \cdot \frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+4-x^2+x-6}{x^2-x+6} \right) \cdot \frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x^2+3x-2)(3x)}{(x^2-x+6)(x-1)}} =$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x(x-2)(x-1)}{(x^2-x+6)(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x(x-2)}{x^2-x+6}} = e^{\frac{3}{6}} = e^{\frac{1}{2}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 4} \right)^{\frac{x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 4} - 1 \right) \cdot \frac{x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x-2-x^2+2x-4}{x^2-2x+4} \right) \cdot \frac{x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-x^2+5x-6)x}{(x^2-2x+4)(x-2)}} =$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(x-3)(x-2)}{(x^2-2x+4)(x-2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(x-3)}{x^2-2x+4}} = e^{\frac{2}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2 - x + 1}{4x + 4} \right)^{\frac{2x}{x-3}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2 - x + 1}{4x + 4} - 1 \right) \cdot \frac{2x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2 - x + 1 - 4x - 4}{4x + 4} \right) \cdot \frac{2x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x + 4} \cdot \frac{2x}{x-3}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+1)(x-3)(2x)}{(4x+4)(x-3)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+1)(2x)}{(4x+4)}} = e^{\frac{42}{16}} = e^{\frac{21}{8}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{5x + 1} \right)^{\frac{3}{x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{5x + 1} - 1 \right) \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 3x + 1 - 5x - 1}{5x + 1} \right) \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 8x}{5x + 1} \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(x-8)}{x(5x+1)}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x-8)}{5x+1}} = e^{-24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} \right)^{\frac{1}{x-1}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 2x + 3 - x - 1}{x + 1} \right) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \cdot \frac{1}{x-1}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1}} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**EJERCICIO 6 : Calcula estos límites:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2-3x}{-2x+1} \right)^{\frac{-x}{2}} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+2x}{2x+5} \right)^{2x^2-1} & \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x-2}{4+5x} \right)^{\frac{2x}{3}} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x-2}{3x+5} \right)^{x^2-1} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{x} \right)^{2x-3} & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{2+3x^2} \right)^{\frac{x+1}{2}} & \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{2x} & \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x^2-7}{3x^2+9x} \right)^x \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-1}{3x+2} \right)^{x^2} & \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-2}{3+2x} \right)^{x+1} \end{aligned}$$

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2-3x}{-2x+1} \right)^{\frac{-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2+3x}{2x+1} \right)^{\frac{x}{2}} = \left( \frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+2x}{2x+5} \right)^{2x^2-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+2x}{2x+5} - 1 \right) \cdot (2x^2-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+2x-2x-5}{2x+5} \right) \cdot (2x^2-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^2+4}{2x+5}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x-2}{4+5x} \right)^{\frac{2x}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x-2}{4+5x} - 1 \right) \cdot \frac{2x}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x-2-4-5x}{4+5x} \right) \cdot \frac{2x}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x}{12+15x}} = e^{-\frac{12}{15}} = e^{-\frac{4}{5}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x-2}{3x+5} \right)^{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-4x-2}{-3x+5} \right)^{x^2-1} = \left( \frac{4}{3} \right)^{+\infty} = +\infty$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{x} \right)^{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{1}{x} \right)^{-2x-3} = 2^{-\infty} = 0$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{2+3x^2} \right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{2+3x^2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{x+1}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2-2-3x^2}{2+3x^2} \right) \cdot \left( \frac{x+1}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-2}{4+6x^2}} = e^0 = 1$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} - 1 \right) \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2} \right) \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2-2}} = e^0 = 1$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x^2-7}{3x^2+9x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^2-7}{3x^2-9x} \right)^{-x} = \left( \frac{4}{3} \right)^{-\infty} = \left( \frac{3}{4} \right)^{+\infty} = 0$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-1}{3x+2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-2x-1}{-3x+2} \right)^{x^2} = \left( \frac{2}{3} \right)^{+\infty} = 0$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-2}{3+2x} \right)^{x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-2}{3+2x} - 1 \right) \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-2-3-2x}{3+2x} \right) \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x-5}{3+2x}} = e^{-\frac{5}{2}}$$

**EJERCICIO 7 : Halla los límites:**

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 1} \right] \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x + \sin x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1} \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-2}{4+3x} \right)^{x+1} \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^3 + 3x^2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^3 + 3x}}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad h) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x}{x^2 - 4} - \frac{x+1}{x-2} \right) \quad i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \sin x}{x + \sin x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} \quad k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 + x} + x \right] \quad l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos x}{x^2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{x+1} - \frac{3x^3}{x^2 - 1} \right) \quad n) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+3}{2x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} \quad ñ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x \cos x + \sin x}$$

*Solución:*

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x - 1}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x + x} = \frac{-3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)^2 (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)(x+1)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)(x+1)} = +\infty \Rightarrow \text{Como son distintos} \Rightarrow \text{No existe el límite}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x + \sin x} = \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \quad * \text{ Hemos aplicado la regla de L'Hôpital.}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{x-1} = \frac{2}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x-1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x-1} = +\infty \Rightarrow \text{Como son distintos} \Rightarrow \text{No existe el límite}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-2}{4+3x} \right)^{x+1} = \left( 1^+ \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-2}{4+3x} - 1 \right) \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2-4-3x}{4+3x} \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x-6}{3x+4}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^3 + 3x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{3x^2 + 6x} = \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{6x + 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

\* Hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^3 + 3x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{-x^3 - 3x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^{3/5}}{x} = 0$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x}{x^2 - 4} - \frac{x+1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - (x+1)(x+2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - 2}{x^2 - 4} = \frac{-6}{0}$$

Hallamos los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 - 2}{x^2 - 4} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 - 2}{x^2 - 4} = -\infty \Rightarrow$  No existe el límite

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \left( \frac{0}{0} \right) * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 - 2}{1 + 1} = 0 \quad * \text{ Hemos aplicado la regla de L'Hôpital.}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 + x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 - x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos x}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{1} = 2$$

\* Hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{x+1} - \frac{3x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2(x-1) - 3x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 3x^2 - 3x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x^2 - 1} = -3$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+3}{2x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} = \left( \frac{1}{1} \right)^{\infty} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+3}{2x+2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-2x-2}{2x+2} \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{(2x+2)(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x+2}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

$$ñ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x \cos x + \operatorname{sen} x} = \left( \frac{0}{0} \right) * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\cos x - x \operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

\* Hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

## CONTINUIDAD

**EJERCICIO 8 :** Dada la función  $f(x) = \frac{3x^3 + 15x^2 + x + 5}{x^2 + 3x - 10}$ , estudia su continuidad. Indica el tipo de discontinuidad que hay en los puntos en los que no es continua.

$$\text{Solución: } f(x) = \frac{3x^3 + 15x^2 + x + 5}{x^2 + 3x - 10} = \frac{(x+5)(3x^2 + 1)}{(x+5)(x-2)}$$

• Dominio =  $\mathbf{R} - \{-5, 2\} \Rightarrow f(x)$  es continua en  $\mathbf{R} - \{-5, 2\}$ .

• Veamos que tipo de discontinuidad que presenta en  $x = -5$  y en  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x^2 + 1}{x - 2} = \frac{76}{-7} = -\frac{76}{7} \Rightarrow \text{Discontinuidad evitable en } x = -5.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 1}{x - 2} = \frac{13}{0} \quad \text{Hallamos los límites laterales: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Discontinuidad de salto infinito en  $x = 2$ .

**EJERCICIO 9** : Estudia la continuidad de la función:  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4 + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

*Solución:*

• Dominio =  $\mathbf{R}$

• Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 1 \rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 1) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

• En  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 1) = 1$

$$f(0) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + 1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 + \ln x) = 1 \\ f(1) = 4 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

• En  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 + \ln x) = 1$

$$f(1) = 4$$

• Por tanto,  $f(x)$  es continua en  $\mathbf{R}$ .

**EJERCICIO 10** : Estudia la continuidad de la siguiente función. En los puntos en los que no

sea continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta:  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 8}{x^2 + 3x - 10}$

*Solución:*  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 8}{x^2 + 3x - 10} = \frac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)}$

• Dominio =  $\mathbf{R} - \{-5, 2\} \Rightarrow f(x)$  es continua en  $\mathbf{R} - \{-5, 2\}$ .

• Veamos el tipo de discontinuidad que presenta en  $x = -5$  y en  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-11}{0}. \text{ Hallamos los límites laterales: } \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty$$

Discontinuidad de salto infinito en  $x = -5$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{10}{7} \Rightarrow \text{Discontinuidad evitable en } x = 2.$$

**EJERCICIO 11** : Estudia la continuidad de la siguiente función:  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

*Solución:*

• Dominio =  $\mathbf{R}$

• Si  $x \neq -1$  y  $x \neq 2 \rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por funciones que son continuas en los intervalos correspondientes.



- $$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+3}{x} = -1$$
- En  $x = -1$ : 
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 2) = -1 \\ f(-1) &= -1 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = -1.$$
- En  $x = 2$ : 
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 1) = 7 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ es discontinua en } x = 2. \text{ Hay una discontinuidad de salto finito.}$$

**EJERCICIO 12 :** Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es

continua, indica el tipo de discontinuidad que hay:  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - 1}$

*Solución:*

- Dominio =  $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$ .  $\Rightarrow f(x)$  es continua en  $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$ .
- Veamos el tipo de discontinuidad que presenta en  $x = -1$  y en  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0 \Rightarrow \text{Discontinuidad evitable en } x = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \frac{-4}{(0)}. \text{ Hallamos los límites laterales: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Discontinuidad de salto infinito en  $x = 1$ .

**EJERCICIO 13 :** Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 + bx + 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ ax & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

*Solución:*

- Si  $x \neq 1$  y  $x \neq -1 \rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

$$- \text{ En } x = -1: \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^3 - x^2 + a) = a - 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + bx + 1) = 2 - b \Rightarrow \\ f(-1) &= 2 - b \end{aligned} \right.$$

Para que sea continua en  $x = 1$ , ha de ser  $a - 3 = 2 - b$ .

$$- \text{ En } x = 1: \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + bx + 1) = b + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax) = a \\ f(1) &= a \end{aligned} \right.$$

Para que sea continua en  $x = 1$ , ha de ser  $a = b + 2$ .

- Uniendo las dos condiciones anteriores,  $f(x)$  será continua si: 
$$\begin{cases} a - 3 = 2 - b \\ a = b + 2 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

**EJERCICIO 14 : Estudia la continuidad de la función:** 
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

*Solución:*

- Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 1 \rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - 2^x) = -1 \\ \text{- En } x = 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x - 1) = 1 \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x - 1) = -1 \\ \text{- En } x = 1: \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + \ln x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Hay una discontinuidad de salto finito en } x = 1.$$

**EJERCICIO 15 : Halla los valores de  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x - a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2^x + \log_2 x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

*Solución:*

- Si  $x \neq 1$  y  $x \neq 2 \rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + bx - 1) = b - 2 \\ \text{- En } x = 1: \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - a) = 3 - a \\ f(1) = 3 - a \end{array} \right\} \text{Para que sea continua en } x = 1, \text{ ha de ser } b - 2 = 3 - a.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - a) = 6 - a \\ \text{- En } x = 2: \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2^x + \log_2 x) = 5 \\ f(2) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Para que sea continua en } x = 2, \text{ ha de ser } 6 - a = 5, \text{ es decir } a = 1.$$

- Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que, para que  $f(x)$  sea continua, ha de ser:

$$\left. \begin{array}{l} b-2=3-a \\ a=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a=1 \\ b=4 \end{array}$$

**EJERCICIO 16 :** Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta:  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$

Solución:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = \frac{x(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)}$$

• Dominio =  $\mathbf{R} - \{-2, 3\}$

$f(x)$  es continua en  $\mathbf{R} - \{-2, 3\}$ . Veamos el tipo de discontinuidad que hay en  $x = -2$  y en  $x = 3$ :

- En  $x = -2$ :  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$  Hay una discontinuidad infinita en  $x = -2$ .

- En  $x = 3$ :  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+1)}{x+2} = \frac{12}{5} \Rightarrow$  Hay una discontinuidad evitable en  $x = 3$ .

**EJERCICIO 17 :** Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 1}{3} & \text{si } x < -1 \\ e^{x^2 - 1} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

- Si  $x \neq -1$  y  $x \neq 1 \rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- En  $x = -1$ :  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$   
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{x^2 - 1} = 1$   
 $f(-1) = 1$

Hay una discontinuidad de salto finito en  $x = -1$ .

- En  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x^2 - 1} = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$   
 $f(1) = 1$

$f(x)$  es continua en  $x = 1$ .

**EJERCICIO 18 :** Halla los valores de  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + bx + a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

• Dominio =  $\mathbf{R}$

- Si  $x \neq 1$  y  $x \neq 2 \rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - a) = 3 - a$$

- En  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 + bx + a) = 2 + b + a$

$$f(1) = 2 + b + a$$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$ , ha de ser:  $3 - a = 2 + b + a \rightarrow 2a + b = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 + bx + a) = 8 + 2b + a$$

- En  $x = 2$ :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 1) = 7$

$$f(2) = 7$$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 2$ , ha de ser:  $8 + 2b + a = 7 \rightarrow a + 2b = -1$

- Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que:

$$2a + b = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 1 - 2a \\ a + 2b = -1 \end{array} \right.$$

$$a + 2b = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 1 - 2a \\ a + 2(1 - 2a) = -1 \end{array} \right. \rightarrow a + 2 - 4a = -1 \rightarrow -3a = -3 \rightarrow a = 1; \quad b = -1$$

**EJERCICIO 19** : Calcula el valor de  $a$  para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3a + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

*Solución:*

- Dominio =  $\mathbf{R}$

- Si  $x \neq 1 \rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - 2x + 1) = a - 1$$

- En  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3a + \ln x) = 3a$

$$f(1) = a - 1$$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$ , ha de ser:  $a - 1 = 3a \rightarrow 2a = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$

**EJERCICIO 20** : Halla el valor de  $k$  para que la siguiente función sea continua en  $x = 2$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

*Solución:*

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 2$ , ha de tenerse que:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2 (3x+1)}{(x-2)^2 (4x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{4x+2} = \frac{7}{10}$$

$$f(2) = k$$

- Por tanto, ha de ser:  $k = \frac{7}{10}$

**EJERCICIO 21** : Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si } x \leq 1 \\ 4x^2 + ax + b & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3x + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

*Solución:*

- Si  $x \neq 1$  y  $x \neq 2 \rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - 2x) = a - 2$$

- En  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x^2 + ax + b) = 4 + a + b$

$$f(1) = 4 + a + b$$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$ , ha de ser:  $a - 2 = 4 + a + b \rightarrow b = -6$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x^2 + ax - 6) = 10 + 2a$$

- En  $x = 2$ :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 6) = 0$

$$f(2) = 0$$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 2$ , ha de ser:  $10 + 2a = 0 \rightarrow 2a = -10 \rightarrow a = -5$

- Por tanto,  $f(x)$  será continua si  $a = -5$  y  $b = -6$ .

**EJERCICIO 22** : Halla el valor de  $a$  para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3a + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

*Solución:*

- Si  $x \neq 1 \rightarrow$  la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2^x + a) = 2 + a$$

- En  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3a + 5) = 6 - 3a$

$$f(1) = 2 + a$$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$ , ha de ser:  $2 + a = 6 - 3a \rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 1$

## TEOREMAS

**EJERCICIO 23** : Dada la función  $f(x) = x^3 + 2x + 1$ , encuentra un intervalo de amplitud menor que 2 en el que  $f(x)$  corta al eje  $OX$ .

*Solución:*

- $f(x)$  es continua en  $\mathbf{R}$ , pues es una función polinómica.

- Tanteando, encontramos que  $f(-1) = -2$ ,  $f(0) = 1$ .

- Es decir:  $f(x)$  es continua en  $[-1, 0]$  }  
signo de  $f(-1) \neq$  signo de  $f(0)$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un  $c \in (-1, 0)$  tal que  $f(c) = 0$ .  $f(x)$  cortará al eje  $OX$  en  $x = c$ .

**EJERCICIO 24 : Halla un intervalo de amplitud menor que 2 en el que la siguiente ecuación tenga, al menos, una raíz real:  $3x^3 + 2x - 7 = 0$**

*Solución:*

- Consideramos la función  $f(x) = 3x^3 + 2x - 7$ , continua por ser polinómica.
- Tanteando, encontramos que  $f(1) = -2$ ;  $f(2) = 21$ .
- Es decir:  $f(x)$  es continua en  $[1, 2]$  }  
signo de  $f(1) \neq$  signo de  $f(2)$

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe, al menos, un  $c \in (1, 2)$  tal que  $f(c) = 0$ .  
La raíz de la ecuación es  $c$ .

**EJERCICIO 25 : Prueba que la función  $f(x) = 3x + \cos \pi x + 1$  corta al eje  $OX$  en el intervalo  $[-1, 0]$ .**

*Solución:*

- $f(x)$  es una función continua en  $\mathbf{R}$ , pues es suma de funciones continuas. En particular, será continua en  $[-1, 0]$ .
- Por otra parte:  $f(-1) = -3 < 0$  }  
 $f(0) = 2 > 0$  } signo de  $f(-1) \neq$  signo de  $f(0)$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un  $c \in (-1, 0)$  tal que  $f(c) = 0$ .  
 $f(x)$  cortará al eje  $OX$  en  $x = c$ .

**EJERCICIO 26 : Demuestra que la ecuación:  $x^7 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$  tiene, al menos, una solución real. Determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.**

*Solución:*

- Consideramos la función  $f(x) = x^7 + 3x^2 - 2x + 1$ , que es continua por ser polinómica.
- Tanteando, encontramos que  $f(-2) = -111$ ;  $f(-1) = 5$ .
- Es decir:  $f(x)$  es continua en  $[-2, -1]$  }  
signo de  $f(-2) \neq$  signo de  $f(-1)$

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe, al menos, un  $c \in (-2, -1)$  tal que  $f(c) = 0$ .  
La raíz de la ecuación es  $c$ .

**EJERCICIO 27 : Demuestra que la ecuación  $e^{-3x} + 4x - 2 = 0$  tiene, al menos, una solución real en el intervalo  $[0, 1]$ .**

*Solución:*

- Consideramos la función  $f(x) = e^{-3x} + 4x - 2$ , continua en  $\mathbf{R}$ , pues es suma de funciones continuas. En particular, será continua en  $[0, 1]$ .
- Por otra parte, tenemos que:  $f(0) = -1 < 0$  }  
 $f(1) = e^{-3} + 2 > 0$  } signo de  $f(0) \neq$  signo de  $f(1)$

• Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un  $c \in (-1, 0)$  tal que  $f(c) = 0$ .  
La raíz de la ecuación es  $c$ .