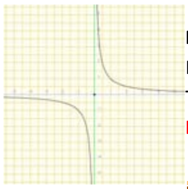
RESUMEN DE LÍMITE DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD

LÍMITES CUANDO X → ∞ DE UNA FUNCIÓN . ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$; se dice que la recta $y = A$ es **ASÍNTOTA HORINZONTAL DE** $f(x)$

Ej.: y= $\frac{3x-1}{x-2}$, como $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x-2} = 3$, entonces $y = 3$ es asíntota horizontal

Ej.: $y = x^2-1$, como $\lim_{x\to\infty} x^2 - 1 = \infty$, entonces no tiene asíntotas horizontales



FUNCIÓN INVERSA

F(x) = 1/x

Tiene por **ASÍNTOTA HORIZONTAL** y=0 pues

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

OPERACIONES CON LÍMITES DE FUNCIONES

: Sean dos funciones ***f(x)*** y ***g(x)***, para las que existe límite en un punto o en el infinito. Entonces: $\lim(f(x)\pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$; $\lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$

$$Si\ \lim g(x) \neq 0,\ entonces\quad \lim\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

$$\lim[f(x)^{g(x)}] = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL:

$$\lim_{x\to\infty} r^x \begin{cases} \infty & \text{si } r>1 \\ 0 & \text{si } 0<r<1 \\ 1^\infty & \text{si } r=1 \text{ (indeterminación nº e)} \end{cases}$$

TIPOS DE INDETERMINACIONES:

$$\frac{0}{0}\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ \infty-\infty\ ;\ 1^\infty\ ;\ 0\cdot\infty\ ;\ 0^0\ ;\ \infty^0$$

INDETERMINACIÓN ∞/∞

- **I: SI SE TRATA DE FUNCIONES POTENCIALES DIVIDIMOS TODOS LOS SUMANDOS POR LA X ELEVADA AL MAYOR EXPONENTE o aplicamos la siguiente regla práctica:**

$$\mathrm{Lim}\ \frac{ax^n+\cdots}{bx^m+\cdots} = \frac{\infty}{\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } m>n \\ & \text{si } m=n \\ & \text{si } n>m \end{cases}$$

NOTA: Límite cuando x tiende a menos infinito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$$

- **II: Si son** funciones exponenciales dividimos por la exponencial de mayor base.
- **III: Por** comparación de infinitos.

INDETERMINACIÓN: ∞ - ∞

- **I: Si son FUNCIONES RACIONALES ponemos común denominador**, y obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$. Resolvemos esta indeterminación
- **II :** Si son **FUNCIONES IRRACIONALES podemos multiplicar y dividir por el conjugado.Ejemplo:**

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}-x)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x-2}-x)(\sqrt{x^2+4x-2}+x)}{\sqrt{x^2+4x-2}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-2-x^2}{\sqrt{x^2+4x-2}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{\sqrt{x^2+4x-2}+x} = \frac{4}{1+1} = 2$$

- **III: Por** comparación de infinitos.

INDETERMINACIÓN : $\frac{0}{0}$

- **I: FUNCIÓN RACIONAL SIN RADICALES: Se descomponen en factores los polinomios y se simplifica la fracción.**
- **II: FUNCIÓN RACIONAL CON RADICALES:** En primer lugar **multiplicamos numerador y denominador por el conjugado** de la expresión irracional. Realizamos las operaciones y simplificamos la fracción

Ej.: $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{2-\sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(2+\sqrt{x+2})}{(2-\sqrt{x+2})(2+\sqrt{x+2})} = \lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(2+\sqrt{x+2})}{4-(x+2)=2-x} = \lim_{x\to2}\frac{(x-1)(2+\sqrt{x+2})}{-1} = -4$

INDETERMINACIÓN 1^∞

Se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e.

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$$

Ej.: $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x-3}{2x+5}\right]^{5x+1} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{2x-3}{2x+5}-1\right]^{5x+1} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{2x-8}{2x+5}\right]^{5x+1} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{2x+5}{2x-8}}\right]^{\frac{2x+5}{2x-8}\cdot\frac{2x-8}{2x-8}(5x+1)}$

$= e^{\lim \frac{2x-8}{2x-8}(5x+1)}$ -10

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN f(x) EN UN PUNTO x=a: Para cualquier entorno que tomemos del valor del límite , E(L,ε) , por pequeño que este sea, vamos a poder encontrar un entorno de a , E(a,δ) , de forma que los valores de x que estén dentro de este entorno cumplan que sus imágenes , f(x) (sin contar a), están dentro del entorno de L , E(L,ε). Con símbolos:

$\forall E(L,\varepsilon)$ $\exists$ E(a,δ) tal que $\forall x \in E(a,\delta)$ sus imagenes $f(x) \in E(L,\varepsilon)$ es decir

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *tal que si* $|x-a|<\delta$ tendremos que $|f(x)-L|<\varepsilon$

ASÍNTOTAS VERTICALES : k/0 (+∞ o -∞)

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0} = \infty$ (puede ser +∞ o -∞, *en este sentido es indeterminado*) ↔ Se dice que **x=a** es una ASÍNTOTA VERTICAL DE f(x)

(Nota: Determinamos sus límites laterales para determinar la posición de la función respecto a dicha asíntota o si tiende a +∞ o a -∞)

1**Ejemplos**:La f(x) = x^3-2x+1 (función polinómica) NO TIENE ASÍNTOTAS. Domf(x) = R y $\lim_{x\to\infty} x^3-2x+1 = +\infty$ *,no tine horizontales*. Tampoco tiene verticales pues no existe ningún valor para el cual la función tienda a ∞. Se puede concluir que:**las funciones polinómicas no tiene asíntotas**

2Ejemplo.: Dada la f(x) =$\frac{x+1}{x-2}$. Determina sus asíntotas horizontales y verticales .Domf(x) = R-{2}.

2.1   1.9

- **ASÍNTOTA HORIZONTAL :** $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-2} = 1$ *Entonces* $y = 1$ *es ASÍNTOTA HORIZONTAL*
- **ASÍNTOTA VERTCAL:** $\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{0} = \infty$ entonces **x=2 es ASÍNTOTA VERTICAL** ($\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x-2} = +\infty; \lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x-2} = -\infty$)

FUNCIONES CONTINUAS: Intuitivamente una función es continua cuando su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

De una manera "más formal". **UNA FUNCIÓN ES CONTINUA EN UN PUNTO a SI SE VERIFICAN TRES CONDICIONES:**

1ª) Existe f(**a**)
2ª) Existe el límite de f(x) cuando x tienda a .
Por tanto existen los laterales y coinciden.
3ª) Coincide el valor de f(a) con el límite

⟺

UNA FUNCIÓN ES CONTINUA si cumple $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

NOTA: PARA ESTUDIAR LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCION **LO PRIMERO ES DETERMINAR SU DOMINIO.**

OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS

Sean f y g dos funciones continuas en **a**:

a) f +g y f.g son continuas en **a**.
b) si además g(a)≠0, entonces f/g es continua en **a**.
c) Si g es continua en **a** y **f** continua en **g(a)** entonces **f∘g** es continua en **a**.

EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS

- TODA FUNCIÓN POLINÓMICA ES CONTINUA EN todos los reales.
- LAS FUNCIONES RACIONALES SON CONTINUAS SALVO EN LOS PUNTOS QUE ANULAN AL DENOMINADOR.
- LAS FUNCIONES SENO, COSENO, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS SON CONTINUA EN SUS DOMINIOS RESPECTIVOS.

FUNCIONES DISCONTINUAS. TIPOS :

Si una función no es continua en un punto será discontinua y **estudiando el valor del límite** en dicho punto, clasificamos el tipo de discontinuidad

- **DISCONTINUIDAD EVITABLE : SI EXISTE LÍMITE DE LA FUNCIÓN EN EL PUNTO**, pero **o** no coincide con el valor de la función, f(a), o **a** no pertenece al dominio de f . Ej.: Dada la función f(x) =$\frac{x^2-9}{x-3}$. Su Domf(x) = R-{3}.Entonces es continua en R-{3}, al ser una función racional. Como tiene límite en x=3,pues $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{0}{0} = 6$, presentará una **DISCONTINUIDAD EVITABLE EN X=3.**

- **DISCONTINUIDAD DE 1°ESPECIE (O DE SALTO FINITO) SI EXISTEN LOS LÍMITES LATERALES EN DICHO PUNTO SIENDO FINITOS PERO NO COINCIDEN** Ej.: Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x>3 \\ x-1 & x<3 \end{cases}$. Dom f(x) = R-{3}, en x =3 presenta una **DISCONTINUIDAD DE SALTO FINITO** pues : $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{0}{0} = 6 \neq \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$

- **DISCONTINUIDAD DE 1° ESPECIE DE SALTO INFINITO CUANDO UNO (o los dos) DE LOS LÍMITES LATERALES DE INFINITO**.Ej.: f(x)=$\frac{2}{1-x}$, su Domf(x) = R-{1},será continua en R-{1}, al ser una función racional será continua salvo donde se anule el denominador. Como los limites son ∞, **la DISCONTINUIDAD SERÁ DE SALTO INFINITO**

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0} = -\infty$ *y* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

- **DISCONTINUIDADES ESENCIALES DE 2ª ESPECIE SI NO EXISTE ALGUNO DE LOS LÍMITES LATERALES** . Ej: f(x) = $\sqrt{x-2}$

Domf(x) =[2,∞). En x=2 estudiamos la continuidad 1º) f(2) =0

2º) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ *no existe* entonces presenta **UNA DISCONTINUIDAD DE 2ª ESPECIE.**

http://ficus.pntic.mec.es/phes0006/index.html

Profesora: Rosa Hernández Gila. Curso 2008/2009
I.E.S.Profesor Máximo trueba