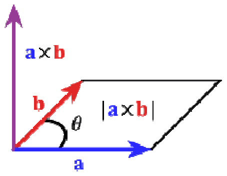
GEOMETRÍA

1.- BASE EN IR^3

- Dados los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$,…,$\vec{w}$ y los números a, b, c,…, g, la expresión $a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}+\ldots+g\vec{w}$ se llama **combinación lineal** de esos vectores.
- Dos vectores son **linealmente dependientes** si alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás. En caso contrario se llaman **linealmente independientes**.
    - o Dos vectores alineados (proporcionales) son L.D.
    - o Dos vectores no alineados son L.I.
    - o Tres vectores coplanarios son L.D.
    - o Tres vectores no coplanarios son L.I.
- Tres vectores no coplanarios, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, forman una **base** $\beta(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ porque cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de ellos.
- Si los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ son perpendiculares entre sí, la base $\beta(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ se llama **ortogonal**. Si además tienen módulo 1, se dice que la base es **ortonormal**.
- Dada una base $\beta(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, cualquier vector $\vec{v}$ se puede expresar de forma única como combinación lineal de sus elementos: $\vec{v}=a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{y}+c\cdot\vec{z}$. Se escribe $\vec{v}=(a,b,c)$ y se llaman coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto a la base β.

2.- PRODUCTOS DE VECTORES.

- **Producto escalar**: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$ y también $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$. Se aplica para:
    - o Calcular el <u>módulo de un vector</u>: $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$.
    - o Calcular el <u>ángulo entre dos vectores</u>: $\alpha=\text{arc cos}\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$.
    - o Calcular la <u>proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$</u>: $P(\vec{u}\text{ sobre }\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}=\dfrac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}$.
    - o Como <u>criterio de perpendicularidad</u>: $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- **Producto vectorial**: El resultado es un vector perpendicular a ambos:



$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1,-x_1z_2+x_2z_1,x_1y_2-x_2y_1)$$

Además, su módulo es $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\text{sen}\,\theta$ y coincide con el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

- **Producto mixto**: Se llama producto mixto de tres vectores al número que resulta de hacer $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Su valor absoluto coincide con el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

3.- APLICACIONES DE VECTORES A PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.

- Coordenadas de un vector que une dos puntos.- Si $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ son dos puntos, el vector que une A con B es $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.
- Puntos alineados.- Tres puntos $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ y $C(x_3,y_3,z_3)$ están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son paralelos (proporcionales), es decir:

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_2}.$$

- Punto medio de un segmento.- El punto medio, PM, del segmento $\overrightarrow{AB}$ es:

$$PM_{AB}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

- Punto simétrico.- Si $A'(x,y,z)$ es el punto simétrico de $A(x_1,y_1,z_1)$ respecto al punto $B(x_2,y_2,z_2)$, entonces B es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, es decir:

$$\frac{x+x_1}{2}=x_2;\qquad \frac{y+y_1}{2}=y_2;\qquad \frac{z+z_1}{2}=z_2.$$

4.- ECUACIONES DE LA RECTA.

Una recta r queda determinada por un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ de la recta y un vector $\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)$ paralelo a dicha recta (vector director).

- Ecuación vectorial de la recta:

$$r\equiv(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+\lambda\cdot(d_1,d_2,d_3).$$

- Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r\equiv\begin{cases} x=p_1+d_1\cdot\lambda \\ y=p_2+d_2\cdot\lambda \\ z=p_3+d_3\cdot\lambda \end{cases}$$

- Ecuación continua de la recta:

$$r\equiv\frac{x-p_1}{d_1}=\frac{y-p_2}{d_2}=\frac{z-p_3}{d_3}.$$

También se puede expresar una recta como intersección de dos planos:

- Ecuación implícita de la recta:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d=0 \end{cases}$$

En este caso, podemos conseguir puntos de la recta resolviendo el sistema y su vector director se consigue haciendo el producto vectorial $\vec{d}=(a,b,c)\times(a',b',c')$.

5.- POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS.

Dos rectas en el espacio pueden ser coincidentes, paralelas, pueden cortarse en un punto o pueden cruzarse. Para estudiar posiciones relativas entre dos rectas, r y s, utilizaremos rangos. Consideramos las matrices:

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} d_1 & d_1' \\ d_2 & d_2' \\ d_3 & d_3' \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} q_1-p_1 \\ q_2-p_2 \\ q_3-p_3 \end{matrix}\right.\right)$$

donde conocemos $r\equiv\begin{cases} P(p_1,p_2,p_3) \\ \vec{d}=(d_1,d_2,d_3) \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} Q(q_1,q_2,q_3) \\ \vec{d}=(d_1',d_2',d_3') \end{cases}$.

Entonces:

- Si $\operatorname{ran}(M)=\operatorname{ran}(M')=1 \Rightarrow$ **r y s coinciden**.
- Si $\operatorname{ran}(M)=1\neq\operatorname{ran}(M')=2 \Rightarrow$ **r y s son paralelas**.
- Si $\operatorname{ran}(M)=\operatorname{ran}(M')=2 \Rightarrow$ **r y s se cortan**.
- Si $\operatorname{ran}(M)=2\neq\operatorname{ran}(M')=3 \Rightarrow$ **r y s se cruzan**.

6.- ECUACIONES DEL PLANO.

Un plano π queda determinado por un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ del plano y dos vectores paralelos al mismo y linealmente independientes entre sí (no proporcionales): $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, llamados vectores posicionales.

- Ecuación vectorial del plano:

$$\pi\equiv(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+\lambda\cdot(u_1,u_2,u_3)+\mu\cdot(v_1,v_2,v_3).$$

- Ecuaciones paramétricas del plano:

$$\pi\equiv\begin{cases} x=p_1+u_1\cdot\lambda+v_1\cdot\mu \\ y=p_2+u_2\cdot\lambda+v_2\cdot\mu \\ z=p_3+u_3\cdot\lambda+v_3\cdot\mu \end{cases}$$

- Ecuación implícita del plano:

$$\pi\equiv ax+by+cz+d=0$$

En este caso, el vector $\vec{n}_\pi=(a,b,c)$ es un **vector normal** (perpendicular al plano π).

Además

- Si conocemos un punto del plano, P, y dos vectores posicionales, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es fácil conseguir la ecuación implícita de la siguiente manera:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-p_1 \\ u_2 & v_2 & y-p_2 \\ u_3 & v_3 & z-p_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

- Si conocemos un punto del plano P y su vector normal $\vec{n}_\pi = (a,b,c)$, la ecuación implícita es

$$\pi \equiv a\cdot(x-p_1)+b\cdot(y-p_2)+c\cdot(z-p_3)=0 .$$

En este caso, también se puede imponer que el punto P ϵ π, y debe cumplir su ecuación, es decir, sustituir las coordenadas del punto en la ecuación del plano y calcular d.

7.- POSICIONES RELATIVAS ENTRE PLANOS.

Dos planos en el espacio pueden ser coincidentes, paralelos o cortarse en una recta. Para distinguir cada caso consideramos los planos

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv ax+by+cz+d=0 \\ \pi_2 \equiv a'x+b'y+c'+d'=0 \end{cases}$$

y las matrices

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix} d \\ d' \end{matrix}\right.\right).$$

Entonces

- Si $\operatorname{ran}(M)=\operatorname{ran}(M')=1 \Rightarrow$ **π₁ y π₂ son coincidentes**.
- Si $\operatorname{ran}(M)=1\neq\operatorname{ran}(M')=2 \Rightarrow$ **π₁ y π₂ son paralelos**.
- Si $\operatorname{ran}(M)=\operatorname{ran}(M')=2 \Rightarrow$ **π₁ y π₂ se cortan en una recta**.

Tres planos en el espacio pueden ser coincidentes (S.C.I.), paralelos (S.I.), dos paralelos cortados por un tercer plano (S.I.), las tres caras de un prima de base triangular (S.I.), pueden cortarse en una recta (S.C.I.) o pueden cortarse en un punto (S.C.D.). Formando un sistema de ecuaciones y aplicando el $T^{\underline{ma}}$ de Rouchè podremos distinguir cada uno de los casos.

8.- POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTA Y PLANO.

En el espacio, una recta r puede estar contenida en un plano π, puede ser paralela a ese plano o lo puede cortar en un punto.

- La recta r está contenida en el plano π.- En este caso se deben cumplir dos condiciones:
  1. El vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares: $\vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$.
  2. Un punto cualquiera, P, de la recta r también pertenece al plano π.

- La recta r es paralela a plano π.- En este otro caso se debe cumplir:
    1. El vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares: $\vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$.
    2. Un punto cualquiera, P, de la recta r no pertenece al plano π.
- La recta r corta al plano π en un punto P.- En este caso el vector director de la recta y el vector normal al plano forman un ángulo distinto de 90°. Podemos calcular el punto de corte estableciendo un sistema de ecuaciones entre las ecuaciones de la recta y las del plano.

9.- DISTANCIA ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS.

- Distancia entre dos puntos P y Q.- Coincide con el módulo del vector que los une:

$$\text{dist}(P,Q) = \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

- Distancia de un punto P y una recta r.- Si Q es un punto de la recta r, la distancia entre P y r coincide con la altura del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\vec{d}_r$, es decir, con el resultado de dividir el área del paralelogramo entre la longitud de su base:

$$\text{dist}(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_r\right|}{\left|\vec{d}_r\right|}\ .$$

- Distancia de un punto P a un plano π.- Si $P(x_0, y_0, z_0)$ y la ecuación implícita del plano es $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$, entonces:

$$\text{dist}(P,\pi) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ .$$

- Distancia entre dos rectas r y s.- Distinguiremos dos casos:
    - Si las rectas son paralelas, tomamos un punto P_r de la recta r y se cumplirá:

      $$\text{dist}(r,s) = \text{dist}(P,s)\ .$$

    - Si las rectas se cruzan, la distancia entre ellas coincide con la altura del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PQ}$, es decir, con el resultado de dividir el volumen del paralelepípedo entre el área de su base:

      $$\text{dist}(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}\right]\right|}{\left|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\right|}\ .$$

- Distancia de una recta r a un plano π.- Si la recta r corta al plano π, la distancia entre ellos es cero. Si la recta r es paralela al plano π (o está contenida en él)

  $$\text{dist}(r,\pi) = \text{dist}(P_r,\pi)\ .$$

- Distancia entre dos planos π_1 y π_2.- Si los planos π1 y π2 se cortan, la distancia entre ellos es cero. Si no se cortan es porque son paralelos o coinciden. En este caso:

  $$\text{dist}(\pi_1,\pi_2) = \text{dist}(P_{\pi_1},\pi_2) \quad \text{o} \quad \text{dist}(\pi_1,\pi_2) = \text{dist}(P_{\pi_2},\pi_1)$$

10.- ÁNGULOS ENTRE RECTAS Y PLANOS.

- Ángulo entre dos rectas.- El menor ángulo que forman dos rectas es el mismo que el que forman sus vectores directores:

$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_r\right| \cdot \left|\vec{d}_s\right|}\right)$$

- Ángulo entre dos planos.- El ángulo que forman dos planos π_1 y π_2 es el mismo que el que forman sus vectores normales:

$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}\right)$$

- Ángulo entre una recta y un plano.- El ángulo que forman una recta r y un plano π es complementario del que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d}_r\right| \cdot \left|\vec{n}_\pi\right|} \quad \text{ó} \quad \alpha = \text{arc sen}\left(\frac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d}_r\right| \cdot \left|\vec{n}_\pi\right|}\right)$$

11.- ÁREAS Y VOLÚMENES.

- Área de un paralelogramo. Área de un triángulo.- El área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ es el módulo de su producto vectorial:

$$\textit{ÁREA DEL PARALELOGRAMO} = \left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|.$$

  Por lo tanto, el área del triángulo de vértices A, B y C será la mitad del área del paralelogramo, es decir:

$$\textit{ÁREA DEL TRIÁNGULO} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|.$$

- Volumen del paralelepípedo. Volumen del tetraedro.- El volumen del paralelepípedo determinado por tres vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$ es el valor absoluto del producto mixto de estos tres vectores:

$$\textit{VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO} = \left|\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]\right|$$

  Por lo tanto, el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D es

$$\textit{VOLUMEN DEL TETRAEDRO} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]\right|$$

  Otra versión de esta fórmula sencilla de recordar es:

$$\textit{VOLUMEN DEL TETRAEDRO} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

  donde x_i, y_i, z_i son las coordenadas de A, B, C y D, respectivamente.

12.- LUGARES GEOMÉTRICOS. LA ESFERA.

- Plano mediador.- El lugar geométrico de los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de los extremos de un segmento AB se llama plano mediador. Su ecuación se calcula imponiendo la condición que lo define:

$$\text{dist}(X,A)=\text{dist}(X,B)$$

- Planos bisectores.- El lugar geométrico de los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de dos planos π_1 y π_2 son otros dos planos σ_1 y σ_2 llamados planos bisectores, que son perpendiculares entre sí. Sus ecuaciones se calculan imponiendo la condición:

$$\text{dist}(X,\pi_1)=\text{dist}(X,\pi_2)$$

- La esfera.- Una esfera de centro $C(x_0,y_0,z_0)$ y radio r es el lugar geométrico de los puntos $X(x,y,z)$ que cumplen

$$\text{dist}(X,C)=\text{dist}(C,X)=\left|\overrightarrow{CX}\right|=r$$

Al imponer esta condición conseguimos la ecuación de la esfera:

$$e\equiv(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

Desarrollando la expresión se obtiene:

$$e\equiv x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

Si la ecuación tiene este aspecto su centro y su radio son:

$$C\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)\qquad y\qquad r=\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2+\left(\frac{C}{2}\right)^2-D}$$

INFORMACIÓN DE LA UNIVERSIDAD:

Principales contenidos que se tendrán en cuenta en la elaboración de las Pruebas de Acceso a la Universidad para los estudiantes provenientes del Bachillerato LOE. Matemáticas II. Curso 2009-2010

De acuerdo con el Decreto 67/2008, de 19 de junio, por el que se establece el currículo del Bachillerato para la Comunidad de Madrid, publicado en el B.O.C.M. con fecha 27 de junio de 2008, para elaborar las Pruebas de Acceso a la Universidad se tendrán en cuenta los siguientes contenidos:

GEOMETRÍA

1. Vectores. Operaciones con vectores. Dependencia e independencia lineal. Bases. Coordenadas.
2. Producto escalar: definición, propiedades e interpretación geométrica. Vectores unitarios, ortogonales y ortonormales. Módulo. Ángulo entre dos vectores. Proyección de un vector sobre otro.
3. Producto vectorial: definición, propiedades e interpretación geométrica.
4. Producto mixto de tres vectores: definición, propiedades e interpretación geométrica.
5. Ecuaciones de rectas en el espacio. Ecuaciones de planos. Posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio. Distancia entre puntos, rectas y planos. Haces de planos. Perpendicular común a dos rectas. Ángulos entre rectas y planos.

6. Áreas de paralelogramos y triángulos. Volúmenes de prismas y tetraedros.
7. Ecuación de la superficie esférica. Resolución de problemas.